



MEMOIRE DE MASTER

MENTION METIERS DE L'ENSEIGNEMENT, DE L'ÉDUCATION

ET DE LA FORMATION (MEEF)

1^{ER} DEGRE (PDG)

PARCOURS PROFESSEUR DES ÉCOLES (PE)

**L'INTEGRATION DE L'HISTOIRE
DES MATHÉMATIQUES
DANS L'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE
DES NOMBRES DECIMAUX**

Préparé et présenté publiquement par Mademoiselle Géraldine MAUGEE

Réalisé sous la direction de Monsieur Bertrand TROADEC

Et le tutorat de Madame Chrystel NOLEO-GUITTEAUD

Année universitaire 2016-2017

Déclaration de non-plagiat

Je soussignée, Géraldine MAUGEE, étudiante à l'école supérieure du professorat et de l'éducation de l'académie de Martinique (ESPE), composante de l'université des Antilles (UA), déclare sur l'honneur que le mémoire de master MEEF que je présente publiquement est strictement le fruit de mon travail personnel.

L'origine de tout emprunt de texte à un auteur et de toute illustration (tableau, graphique, image, etc.), quelle qu'en soit l'origine, est indiquée précisément dans le texte lui-même et dans la liste des références bibliographiques placée en fin du mémoire.

Fait au Lorrain, le 07/05/2017

Remerciements

Je me permets d'adresser quelques remerciements aux personnes qui m'ont accompagnée dans la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier tout particulièrement Mesdames Chrystel NOLEO-GUITTEAUD et Sylvia EUGENIA, en tant que cotutrices, pour m'avoir guidée dans mon travail et conseillée dans les différentes phases de recherche.

Je remercie également les membres de ma famille pour leur soutien, ainsi que Monsieur Kévin CAPRON qui a su enrichir ma réflexion pour la conception de ce mémoire.

Sommaire

Introduction	1
I. Partie théorique	4
1) Un aperçu historique des décimaux	4
2) L'enseignement des décimaux à travers les programmes	7
3) Les représentations des nombres décimaux chez les élèves et les difficultés	8
a) La rupture avec les « règles de fonctionnement » sur les entiers.....	8
b) Le lien avec les grandeurs et mesures.....	10
c) Quelques « règles implicites » utilisées par les élèves.....	11
4) L'histoire des mathématiques intégrée dans l'enseignement	13
II. Partie empirique.....	16
1) La population	16
2) La procédure	16
a) Séquence n°1 : La numération décimale de position	17
b) Séquence n°2 : Les fractions décimales	18
c) Séquence n°3 : Les nombres décimaux	19
d) Le groupe témoin	21
3) Les outils de mesure	22
4) Les résultats	23
5) Discussion.....	40
Conclusion	44
Bibliographie	46

Table des illustrations

Graphique 1: Résultats obtenus pour les compétences $S_1O_1C_1$ et $S_1O_1C_2$	24
Graphique 2: Résultats obtenus pour la compétence $S_1O_2C_1$	26
Graphique 3: Résultats obtenus pour les compétences $S_1O_3C_1$ et $S_1O_3C_2$	27
Graphique 4: Résultats obtenus pour les compétences $S_2O_1C_1$, $S_2O_1C_2$, $S_2O_1C_3$ et $S_2O_1C_4$.	28
Graphique 5: Résultats obtenus pour les compétences $S_3O_1C_1$ et $S_3O_1C_2$	30
Graphique 6: Résultats obtenus pour les compétences $S_3O_2C_1$ et $S_3O_2C_2$	31
Graphique 7: Résultats obtenus pour les compétences $S_3O_3C_1$ et $S_3O_3C_2$	32
Graphique 8: Résultats obtenus pour les compétences $S_{RO_1C_1}$ et $S_{RO_1C_2}$	34
Graphique 9: Résultats obtenus pour les compétences $S_{RO_3C_1}$ et $S_{RO_3C_2}$	35
Graphique 10: Résultats obtenus pour les compétences $S_{RO_3C_1}$ et $S_{RO_3C_2}$	37
Tableau 1: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences S_{1O1C1} et S_{1O1C2} ...	24
Tableau 2: Moyenne et écart-type calculés pour la compétence $S_1O_2C_1$	26
Tableau 3: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences $S_1O_3C_1$ et $S_1O_3C_2$	27
Tableau 4: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences $S_2O_1C_1$, $S_2O_1C_2$, $S_2O_1C_3$ et $S_2O_1C_4$	28
Tableau 5: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences $S_3O_1C_1$ et $S_3O_1C_2$	30
Tableau 6: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences $S_3O_2C_1$ et $S_3O_2C_2$	31
Tableau 7: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences $S_3O_3C_1$ et $S_3O_3C_2$	33
Tableau 8: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences $S_{RO_1C_1}$ et $S_{RO_1C_2}$	34
Tableau 9: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences $S_{RO_2C_1}$ et $S_{RO_2C_2}$	36
Tableau 10: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences $S_{RO_3C_1}$ et $S_{RO_3C_2}$...	37
Tableau 11: Comparaison des moyennes	38

Introduction

Tout d'abord, il est utile de rappeler la distinction qui existe entre un nombre et ses écritures. Un nombre décimal se définit comme étant un nombre qui peut s'écrire sous forme d'une fraction décimale (quotient d'un entier par une puissance de 10) ; autrement dit, il peut s'écrire comme le quotient d'un entier par un produit de puissance de 5 et/ou de 2. Il s'agit donc d'un nombre qui possède une écriture à virgule finie.

Au cycle 3, dès le Cours Moyen 1, l'apprentissage des nombres décimaux permet d'accroître la compréhension de notre numération décimale. Il s'agit d'amener progressivement les élèves à élargir leur champ numérique, limité jusqu'alors aux nombres entiers. Les élèves sont incités à utiliser, à représenter puis à calculer avec les nombres décimaux dans le but de pouvoir résoudre des problèmes par la suite.

Cependant, l'introduction de ces « nouveaux nombres » se révèle être un moment sensible dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques. En effet, ce nouvel ensemble plus étendu instaure de nouvelles conceptions susceptibles de perturber leurs connaissances des nombres. Les questions qui nous guident sont les suivantes : qu'enseigne-t-on en cycle 3 sur les nombres décimaux ? Et, pourquoi les enseigne-t-on ?

Le cycle 3 vise à approfondir des notions de mathématiques en introduisant les nombres décimaux. Dès le CM1, les fractions sont à la fois objet d'étude et support pour l'introduction et l'apprentissage des nombres décimaux. En effet, pour que les élèves puissent comprendre ces nombres, l'enseignant doit s'appuyer sur « des activités dans lesquelles le nombre entier montre ses limites »¹. Les fractions sont donc d'abord utilisées dans des situations de partage, avant d'amener les élèves à les comparer, les ranger et les repérer sur une demi-droite graduée et enfin, à opérer des calculs pour reconnaître leur statut de nombres. Ainsi, tout au long du cycle, différentes représentations et conceptions sont abordées afin de pouvoir résoudre des problèmes en calculant de manière exacte ou approchée. L'apprenant découvre que le nombre décimal respecte le principe de la numération décimale de position fondé sur le rapport de dix entre les différentes unités ; la virgule permettant de repérer le chiffre des unités par convention.

¹ Ressources d'accompagnement Eduscol.

Les nombres décimaux « se construisent en continuité et en rupture par rapport aux nombres entiers » à partir des fractions décimales.

L'apprentissage des nombres décimaux, dès l'école primaire, représente différents enjeux. En effet, le sens d'une notion doit être abordé par rapport aux problèmes qu'elle permet de résoudre, grâce à ses propriétés conduisant à certaines méthodes ainsi que ses représentations symboliques. L'enseignement-apprentissage des décimaux se présente comme la découverte de « nouveaux » nombres par rapport aux entiers. Après l'enseignement des fractions, la notation décimale apparaît comme une simplification permettant de calculer ou de comparer. En effet, Brousseau (1987) explique que, parmi toutes les opérations que l'on peut faire avec les fractions, les plus difficiles et qui ont recours à de longs calculs sont les comparaisons, les sommes et les différences. Les calculs et les comparaisons sont donc facilités par l'utilisation des décimaux dans la vie courante.

Les programmes insistent sur le lien qu'il faut établir avec les connaissances acquises sur les nombres entiers ; pour assurer la continuité avec les décimaux et éviter ainsi de stabiliser certaines représentations mentales erronées chez les élèves. Mais, si certains élèves construisent des compétences solides, d'autres ont des difficultés à construire les savoirs fondamentaux. Les évaluations nationales confirment ces difficultés. En 2001, les évaluations nationales à l'entrée en 6^{ème}, révèlent que 82,5% des élèves réussissent les exercices « de lectures de graduations utilisant les nombres décimaux », mais dès que l'exercice fait appel au sens de l'écriture décimale, celui-ci devient source de difficultés pour un grand nombre d'élèves (37,8%). On retrouve une confusion entre le vocabulaire pour indiquer les chiffres de la partie entière et ceux de la partie décimale (par exemple, dixième au lieu de dizaine) ou encore des lectures de nombres à partir du dernier chiffre, sans prendre en compte la virgule.

De 2005 à 2008, les résultats des évaluations nationales révèlent que pour plus de la moitié des élèves, le trait de fraction est assimilé à la virgule, où écritures décimale et fractionnaire d'un nombre comportent les mêmes chiffres. Par exemple, les élèves associent 1,4 et $\frac{1}{4}$. De plus, lorsqu'il s'agit d'encadrer un nombre décimal par deux nombres entiers consécutifs, le pourcentage de bonnes réponses est de 34,5 % et descend encore plus bas lorsque l'écriture est fractionnaire (18,3%) en 2008. Par conséquent, environ un tiers des élèves ne parviennent pas à concevoir qu'il existe au moins un nombre décimal entre deux autres, ou même d'en proposer un. De nombreux items évaluent également le lien entre les

différentes écritures d'un nombre décimal (écriture à virgule, écriture utilisant les fractions décimales, etc.). En 2010, 42,1% des élèves ont réussi cet exercice et 56,7% en 2011.

La plupart des items cherchent à mettre en évidence les représentations mentales de ces nombres chez les élèves et les relations qui les lient. L'analyse collective de ces évaluations montre que plusieurs compétences du socle commun de connaissances sont encore en cours d'acquisition, ce qui est compréhensible puisqu'elles renvoient à un processus de conceptualisation qui s'étend au moins sur un cycle. Mais, ce constat nous permet de nous interroger sur la mise en perspective des instructions officielles, des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves.

Alors, comment expliquer les difficultés récurrentes dans l'enseignement-apprentissage des nombres décimaux au cycle 3 ?

Tout d'abord, nos recherches nous ont conduits à poser des questions sur l'apparition de la notion de nombres décimaux dans l'histoire des mathématiques. Puis, nous nous sommes intéressés à la transmission de cette notion à l'école élémentaire, depuis la naissance des programmes scolaires français. Chaque lecture a conduit à enrichir notre point de vue sur ces « nouveaux » nombres et à nous interroger sur leurs représentations chez les élèves. Enfin, il a semblé pertinent de connaître comment l'histoire des mathématiques pouvait être intégrée dans l'enseignement de la numération.

I. Partie théorique

1) Un aperçu historique des décimaux



Après l'usage courant du nombre entier, les hommes ont inventé des sous-parties de l'unité, demi, quart, tiers, septième, etc. Comme pour les nombres entiers, le codage des fractions ne fut pas immédiat. Pendant très longtemps, les fractions n'ont pas eu le « statut de nombre ». En effet, les Grecs, par exemple, concevaient les fractions comme des « opérateurs sur les nombres » (Dubois, Fénichel, Pauvert, 1993).

Les nombres décimaux sont nés des fractions vers 2500 avant J.C. chez les Egyptiens. Cette civilisation percevait déjà cette idée de fraction de l'unité. Rappelons que les Egyptiens possédaient un système de numération additive transcrite à l'aide de différents symboles. Ils utilisaient le hiéroglyphe de la « bouche » placé sur le nombre de parts de l'unité pour caractériser la « partie ».

Par exemple (extrait de *Se former pour enseigner les mathématiques* [1993]), un tiers s'écrivait :

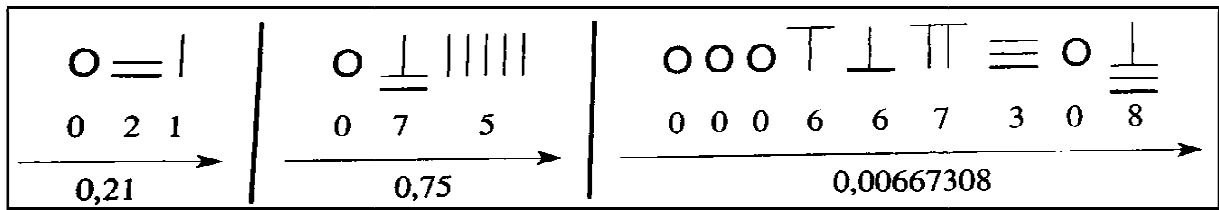


Ils représentaient uniquement des fractions de numérateur 1 et se servaient de décompositions pour écrire des fractions avec un numérateur supérieur à 1.


$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

Une autre civilisation ancienne a également symbolisé les fractions de l'unité et plus particulièrement les fractions décimales. En effet, les Chinois avaient un système de numération de position composé de neuf caractères. Ils ont introduit le signe « 〇 » pour marquer l'absence d'unités dans un ordre.

Exemples (extraits de *Se former pour enseigner les mathématiques* [1993]) :

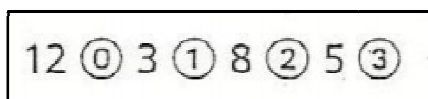


Le décimal de l'Antiquité sert exclusivement au mesurage et à la représentation des quantités. Il s'agit de l'emploi direct du système de numération en usage pour les dénombrements. Pour Chevallard (1981), « le décimal est alors une notion protomathématique » où ses propriétés sont utilisées pour résoudre certains problèmes, mais elle n'est pas reconnue, ni comme objet d'étude, ni même comme outil. Puis, Al Fluwarizmi (780-850) unifie le calcul des naturels et introduit l'emploi de la numération de position décimale permettant l'émergence du nombre décimal comme outil mathématique d'approche des entités mathématiques.

Puis, en 1427, le célèbre astronome Jemshid al Kashi, donne une première définition des fractions décimales et montre comment décomposer toute fraction en somme de fractions décimales. Il montra ainsi l'intérêt des décimaux en convertissant les fractions égyptiennes.

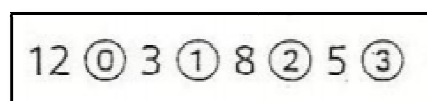
Mais, c'est le mathématicien-physicien, Simon Stevin, qui montra l'intérêt de l'emploi des fractions décimales liées à la numération de position en Occident. En effet, c'est la construction du système décimal et plus particulièrement les nécessités du commerce qui vont permettre d'unifier le domaine numérique.

Dans son célèbre ouvrage *La Disme* (1585), il explique que cette écriture des nombres permet d'une part, d'éviter des calculs chargés de fractions et d'autre part, de s'en tenir aux règles arithmétiques des nombres entiers. Il propose donc une certaine notation décimale. Par exemple (extrait du site de la Mission Maths de l'académie de Rouen), le nombre 12,385 s'écrit et se lit :



12 commencements, 3 primes, 8 secondes, 5 tierces

$$12 + \frac{3}{10} + \frac{8}{100} + \frac{5}{1000} \text{ est donc devenu}$$



Il s'agissait d'exprimer autrement une fraction décimale. L'objectif de Stevin était de montrer que les calculs et mesures étaient simplifiés par cette notation décimale. Le mathématicien approfondit ainsi la notion théorique de nombre réel en insistant également sur le principe que la représentation décimale « illimitée » permet d'assimiler les irrationnels à de véritables nombres (ayant les mêmes propriétés opératoires).

La notation évolua ensuite avec l'apparition d'un séparateur décimal pour devenir 19o178, puis 19.178 et enfin, 19,178. Ce symbole dépend des conventions régionales du système de numération ; généralement, il est représenté par un point dans les systèmes anglo-saxons et par une virgule dans les autres systèmes, dont le nôtre.

En France, le système décimal de numération a été longtemps enrayé. Pourtant, « le besoin de l'uniformité des poids et mesures a été senti dans tous les siècles [...] Il fallait rendre commune dans toutes les provinces l'unité des poids et mesures de la ville de Paris ». Il faudra toutefois attendre le XIX^e siècle pour que le système métrique et les nombres décimaux soient imposés à la population française.

En effet, c'est la Révolution qui imposa la création d'un système de mesure stable, uniforme ; ainsi, elle favorisa le système métrique décimal, permettant de convertir plus aisément les unités en sous-multiples. Cependant, ce n'est qu'en 1882 que l'école primaire obligatoire pu imposer véritablement l'usage du système métrique et des nombres décimaux.

2) L'enseignement des décimaux à travers les programmes

En France, les programmes d'enseignement sont imposés et mettent ainsi en valeur les contenus de savoir sur lesquels l'Institution a pris position. Les programmes français d'enseignement ont évolué quant aux nombres décimaux, suivants les recherches et leurs résultats...

Dès les premiers programmes de l'école primaire de 1882, les nombres décimaux et les fractions sont présents. Ils sont introduits en tant que nombres utiles permettant de répondre à des besoins de mesure pour des apprentissages dits concrets. Notons qu'il s'agit également de conforter le nouveau système métrique mis en place lors de la Révolution française. Le premier sens des décimaux est donc rattaché aux grandeurs « familières », la séparation entre grandeurs et décimaux n'a lieu qu'en 1970.

A partir de cette année-là, les nombres décimaux sont perçus comme un changement d'unité de regroupement. Par exemple, « une ville compte 10 850 habitants. Le millier étant choisi comme unité, la population s'exprime par le nombre décimal 10,850 ». Ainsi, on remarque que tout nombre naturel exprimant une mesure est associé, par un changement d'unité, à un nombre décimal.

Puis, dans les programmes de 1980, les nombres décimaux apparaissent comme des nombres permettant « de pallier l'insuffisance des nombres entiers » ne permettant pas de transmettre une information précise. C'est à partir de là que les décimaux sont perçus comme un ensemble de nombres qui a des propriétés différentes de celles des entiers. Ces programmes souhaitent amener les élèves, par des situations de partage ou à l'aide d'une droite graduée, à prendre conscience de la nécessité du nombre décimal. Ceux-ci soulignent un premier obstacle : dès le cycle élémentaire, les enfants ont fréquenté des écritures à virgule liées à la monnaie ou au système métrique et, par conséquent, il convient d'y être sensibilisé afin de pouvoir assurer la liaison entre ces écritures « complexes » et les nombres décimaux.

En 1990, « l'activité » de l'élève consiste à « exprimer la signification des chiffres dans une écriture décimale » ; en 1998, il doit également « associer le vocabulaire qui convient à la position d'un chiffre d'un nombre. »

Quelques années plus tard, les programmes de mathématiques de 2002, parlent de « nouveaux nombres » qui doivent apparaître utiles pour traiter des problèmes de partage, de mesure de longueurs ou encore d'aires. Les textes expliquent également que la comparaison

des propriétés des nombres décimaux et entiers (nombres consécutifs, intercalation etc.) doit être un outil de compréhension. De plus, à la différence des anciens programmes, celui-ci explicite la compétence « déterminer la valeur de chacun des chiffres composant une écriture à virgule, en fonction de sa position. ». Ils soulignent ainsi l'importance de l'acquisition des règles de la numération positionnelle pour donner sens à l'écriture à virgule.

Les programmes actuels de 2016 reprennent les mêmes propos : les nombres décimaux « apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers ». Ainsi, tout au long du cycle, comme nous l'avons expliqué précédemment, les élèves découvriront différentes représentations et conceptions de ces nombres afin de pouvoir, par la suite, résoudre des problèmes en calculant de manière exacte ou approchée. Les programmes soulignent également l'importance de la continuité avec les nombres entiers pour permettre d'asseoir la compréhension.

3) Les représentations des nombres décimaux chez les élèves et les difficultés

Tout d'abord, une représentation est « une construction mentale élaborée dans un contexte particulier pour servir un but spécifique » (Baligand, 2011).

Ensuite, il est important de souligner que les nombres décimaux ont plusieurs écritures, à adapter selon l'utilisation et la méthode de calcul. Par conséquent, le sens que les élèves construisent et attribuent à celles-ci dépend des situations et des objectifs fixés par l'enseignant. L'écriture sous forme de décomposition additive est utile pour le repérage de points sur une droite numérique car les chiffres peuvent être associés à des subdivisions successives. L'écriture sous forme d'un quotient permet des comparaisons et donc de répondre à des problèmes de mesure. Sous forme d'un produit, les nombres permettent d'exprimer la mesure d'une longueur en choisissant l'unité adaptée.

a) La rupture avec les « règles de fonctionnement » sur les entiers

Brousseau et Douady expliquent les difficultés d'apprentissage des décimaux par un certain nombre de facteurs. Premièrement, les règles « de fonctionnement » utilisées sur les entiers (le nombre de chiffres est déterminant pour l'ordre ou encore multiplier permet

toujours d'obtenir un nombre plus grand, et inversement pour la division) ne peuvent plus correspondre aux décimaux. En effet, la taille d'un nombre n'est plus un paramètre de comparaison.

Ensuite, si on peut construire et manipuler concrètement une collection de 100 à 2000 objets, par exemple, il est moins facile de fabriquer une collection de 13,05 ou 1,035. Les nombres décimaux se révèlent comme étant une « construction d'abord mentale et non physique » (Bolon, 1992). En effet, les décimaux ne permettent pas de « décrire ou traduire toutes les situations auxquelles les enfants sont susceptibles d'être confrontés ». Mais, ces nouveaux nombres permettent d'approcher d'aussi près qu'on le veut les nombres (non décimaux).

Enfin, nous assistons à une certaine « inversion », les élèves ayant découvert les différentes unités dans ce sens : Unités < Dizaines < Centaines < Milliers. Il leur est difficile de conceptualiser : Unités > Dixièmes > Centièmes > Millièmes.

Perrin (1986) s'interroge également sur les différentes représentations des fractions et décimaux chez les apprenants du CM2 à la 4^{ème}. Dans un exercice, plus de 50% des élèves répondent que $\frac{1}{50}$ est la moitié de $\frac{1}{100}$. De même, pour le double de $\frac{1}{100}$, la réponse la plus fréquente est $\frac{1}{200}$. Pour les élèves, « seuls les nombres entiers ont vraiment le statut de nombre, ce qui fait que ces élèves essaient de se ramener aux entiers et à leurs opérations ». Ils semblent donc se représenter les nombres décimaux comme une juxtaposition de deux entiers où les nombres sont accolés, qu'ils soient sous forme fractionnaire ou décimale.

Ainsi, lorsqu'il s'agit d'intercaler trois nombres entre 1,8 et 2,1, les élèves proposent 1,9 ; 1,10 ; 1,11 etc. De nombreux élèves proposent également un nombre avec un zéro derrière la virgule pour rester proche d'un nombre donné : par exemple, entre 1,3 et 1,4, il y a 1,03 ; 1,003 ; ou ajoutent un zéro à la fin : entre 1,6 et 1,8, il y a 1,7 ; 1,70 ; 1,700.

En effet, la notion de successeur ou de prédécesseur d'un nombre est une véritable rupture avec les entiers, puisqu'entre deux nombres, il n'y a plus une quantité finie de nombres.

Chez certains élèves, les écritures décimales ne sont pas des nombres, mais des « codages » d'actions. En effet, Perrin explique que 2,3 est assimilé à « je coupe en deux et j'ajoute 3 petits bouts ». Selon elle, certaines de ces représentations erronées portant sur l'ordre et l'intercalation seraient dues à « l'insuffisance dans l'enseignement du lien entre l'ordre des décimaux positifs et la graduation d'une demi-droite avec une unité quelconque ».

En effet, l'emboîtement des différentes graduations doit être un axe privilégié pour l'apprentissage des décimaux (Comiti et Neyret, 1979) tout en sachant que l'intercalation indéfinie reste une opération de pensée et non matérielle.

b) Le lien avec les grandeurs et mesures

Les élèves s'appuient généralement sur des règles qui sont efficaces sur les décimaux de la vie courante (mètres et millimètres, euros et centimes, etc.). Ils se trouvent donc influencés par ces pratiques sociales de référence en traitant d'un côté les euros, de l'autre les centimes.

Il existe donc un fort lien entre les activités de mesures et les décimaux. L'enseignant doit être vigilant et ne pas limiter les décimaux aux mesures pour ne pas engendrer certaines représentations erronées. En effet, le nombre décimal introduit exclusivement comme un codage de mesure de grandeur (permettant de passer de deux unités à une expression composée d'une unité comme : 1m 456mm et 1,456m) peut poser de nombreux inconvénients (Comiti et Neyret, 1979). Il apparaît ainsi comme un « recollement de deux entiers » favorisant l'idée que les parties entière et fractionnaire se traitent comme des entiers.

Outre cela, les grandeurs instaurent cette idée de contexte qui peut jouer un rôle dans la comparaison des décimaux. Roditi explique que pour les élèves qui n'éprouvent pas de difficultés, l'écriture suffirait à accéder au sens du nombre et le contexte constituerait, dans ce cas, un ensemble d'informations à prendre en compte, qui peut induire en erreur. Par exemple, comparer 1,21 m et 1,4 m est plus difficile que comparer 1,21 et 1,4 car la présence des unités peut conduire à une interprétation des parties décimales comme un nombre de centimètres (1 m et 21 cm à comparer avec 1 m et 40 cm et non pas avec 1 m et 4 cm). A contrario, pour les autres élèves, l'écriture seule ne suffirait pas à accéder au sens du nombre.

Cependant, il ne faut pas pour autant négliger les mesures de grandeurs : elles sont l'occasion, au moyen des conversions, de percevoir l'utilité et le sens des décimaux en tant que valeurs approchées de réels. Par exemple, lorsque 2 154 m peut par choix de l'unité être converti en 2,154 km c'est-à-dire 2 km et quelques. C'est ce travail d'analyse et d'explicitation qui doit être fait avec les élèves.

De même, la mise en relation avec la monnaie peut être problématique, puisque les élèves ne sont amenés à côtoyer que 2 chiffres après la virgule (exemple : 1,45 €). Par

conséquent, de cet angle, il est difficile pour l'élève d'intercaler un ou plusieurs nombres décimaux entre 1,45 et 1,46.

Cette représentation est également renforcée par la numération orale française puisque l'on prononce souvent 11,52 - *onze virgule cinquante deux* -. Neyret a montré que les élèves caractérisaient la partie décimale avec le vocabulaire de la partie entière ; d'où l'importance d'oraliser - *onze unités et cinquante-deux-centièmes* - ou encore - *onze unités cinq dixièmes et deux centièmes* -. En effet, la « lecture avec sens est fondamentale » comme l'explique l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) dans un de leurs articles. Les programmes de 2002 insistaient sur « parler, lire et écrire en mathématiques ».

Ainsi, pour que les élèves puissent s'approprier une représentation correcte des décimaux, il est primordial de « dire, de lire en compréhension » les fractions décimales et les nombres décimaux. 0,6 et $\frac{6}{10}$ sont deux écritures du même nombre qu'il faut lire de la même façon, c'est-à-dire *six dixièmes*. La diversité des écritures décimales et fractionnaires et les lectures qui y sont associées sont essentielles pour une meilleure appropriation du nombre décimal. Pour conclure, passer par une oralisation explicite et structurante permet d'insister sur la signification des chiffres situés après la virgule dans l'écriture d'un nombre décimal.

c) Quelques « règles implicites » utilisées par les élèves

Grisvard et Léonard (1983) par leurs recherches ont pu relever « 3 règles implicites » utilisées par les élèves pour ordonner des nombres décimaux possédant la même partie entière.

La première règle : les élèves s'appuient sur le nombre de chiffres présent après la virgule. Ainsi, le nombre le plus grand est celui qui possède le plus de chiffres après la virgule (*15,219 > 15,6 car 219 > 6).

La deuxième règle, quant à elle, est peut-être renforcée par l'association qui est souvent faite entre les décimaux et les mesures de grandeurs : plus un nombre a de décimales plus il est petit (*16,456 < 16,4). En effet, au niveau des grandeurs et mesures, les élèves explorent le mètre puis ces sous-multiples, décimètres, centimètres, puis les millimètres. Ils

découvrent ainsi des unités de plus en plus petites et cela contribue sans doute à renforcer cette représentation erronée.

La troisième règle, elle, est utilisée par certains élèves lorsqu'il s'agit de comparer plus de deux nombres et que l'un de ces nombres a un zéro comme chiffre des dixièmes. Celui-ci est d'emblée le plus petit, puis ils appliquent la règle 1 ($*12,04 < 12,0325$).

Toutefois, l'application de ces règles peut souvent conduire à de bonnes réponses ce qui rend difficile la perception de ces représentations erronées. Il est donc important de faire expliciter et confronter les procédures de comparaison des élèves pour les amener à se représenter les nombres et à utiliser ses représentations pour raisonner. En effet, l'enseignant peut suggérer la règle implicite que l'élève a probablement utilisée pour l'aider à mieux réfléchir (Roditi, 2007). L'auteur prend en exemple cet entretien enseignant-élève. « Un élève m'a expliqué que comme 7 était plus petit que 14, 8,7 était plus petit que 8,14. Qu'est-ce que tu en penses? », mais « un autre élève, m'a dit que 7 dixièmes c'était pareil que 70 centièmes, et que 70 étant plus grand que 14, c'était 8,7 qui était plus grand que 8,14. Qu'est-ce que tu en penses ? ». Grâce à cette verbalisation de la démarche de l'élève, l'enseignant est à même de le guider dans sa réflexion en le confrontant à son erreur.

De plus, il faut souligner que la comparaison de nombres décimaux implique à la fois un traitement sémantique et syntaxique pour permettre la lecture des nombres (Roditi, 2007).

Seulement, les enseignements convoquent principalement le traitement syntaxique des écritures décimales. Par conséquent, certains élèves se focalisent sur ce dernier et se retrouvent en difficulté pour la comparaison.

Travailler sur le traitement sémantique (valeur du nombre) suppose à la fois une recherche de valeurs approchées et l'utilisation de plusieurs registres de représentation. En effet, cette capacité à changer de registres (écritures décimales, fractionnaires, droites graduées et quadrillages) semble être un élément déterminant pour consolider la compréhension.

4) L'histoire des mathématiques intégrée dans l'enseignement

Comme cela a été expliqué auparavant, l'écriture à virgule doit être considérée comme un système économique de notation des rationnels qui facilite les calculs. Toutefois, du point de vue des élèves, elle présente un inconvénient majeur : « elle masque leur véritable nature » (Brissiaud, 1998).

D'ailleurs, Brousseau (1987) explique l'importance de positionner l'élève face aux mêmes difficultés qu'ont connues les chercheurs en mathématiques permettant un apprentissage constructiviste. Les didacticiens rappellent également que les nombres décimaux ont été inventés pour permettre d'approcher le plus précisément possible n'importe quelle grandeur grâce à des fractionnements de plus en plus petits. « Faire disparaître l'idée de fractionnement dans une progression didactique concernant les décimaux, c'est donc passer à côté de son objet d'étude » (Brissiaud, 1998). Par conséquent, partir des fractions pour enseigner les décimaux, c'est respecter le cheminement de l'Histoire.

En effet, beaucoup de chercheurs se sont intéressés à l'apport de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques. Ainsi, il ne s'agit plus de voir les mathématiques comme un produit achevé, mais comme un processus historique qui suppose une activité intellectuelle (Barbin, 2006). Généralement, les mathématiques sont perçues comme un dogme qui s'impose aux apprenants. Pourtant, elles sont l'œuvre d'hommes et de femmes qui ont cherché à répondre à certaines problématiques et préoccupations de l'époque.

Partir de l'histoire des mathématiques serait donc une « thérapeutique contre l'éparpillement », donnant du sens et favorisant la construction du savoir par l'apprenant lui-même. En effet, selon Jankvist (2009), l'histoire peut constituer un *outil cognitif* permettant d'aider et d'accompagner l'enseignement-apprentissage des mathématiques.

Concernant la notion de nombre, les programmes de mathématiques en vigueur pour le 1^{er} degré comprennent les entiers, les fractions et les décimaux, considérés tous, actuellement, comme des nombres. Néanmoins, l'histoire dévoile les obstacles épistémologiques² qu'il a fallu surmonter pour élargir la notion de nombre. L'existence et la nature de ces obstacles constituent un ensemble de moyens favorisant l'appropriation et une meilleure maîtrise de l'enseignement-apprentissage.

² ...qui concernent la question du sens des concepts.

En effet, elle permet de confronter la question : « pourquoi les contemporains n'ont-ils pas compris telle nouveauté ? » à « pourquoi les élèves ne comprennent-ils ? » car de nombreuses problématiques historiques correspondent aux problématiques enseignantes.

Barbin (1997) souligne ainsi quatre conséquences dans notre pratique : « la rectification des concepts, l'idée de rupture épistémologique, la positivité de l'erreur et la relativité de l'idée de vérité en mathématiques ». Par exemple, *la rectification des concepts* permet d'avoir du recul sur la présentation des mathématiques sous leur dernière « forme ». Ainsi, si le concept de nombre semble s'étendre tout naturellement aux nombres décimaux, l'histoire nous apprend la signification et le rôle des différentes acceptations du concept ; elle nous révèle les problèmes qui ont conduit les mathématiciens à le faire évoluer.

Il s'agit donc d'intégrer l'histoire dans l'enseignement des mathématiques, « de dater l'invention d'un concept, d'expliquer la portée historique d'un concept, de lire des textes anciens, de résoudre des problèmes historiques, etc. »

C'est pourquoi certains chercheurs ont réfléchi au « comment » de l'utilisation de l'histoire. Fried (2001) met en relief la difficulté de traiter convenablement de l'histoire des mathématiques en classe. Pour lui, appréhender un concept mathématique c'est le connaître à la fois « synchroniquement et diachroniquement ». En général, les enseignements privilégieraient une approche diachronique en s'intéressant à un moment précis de l'histoire. Or, Fried explique que le rôle de l'enseignant serait de mettre en place des situations permettant de faire basculer l'élève entre les deux approches afin de percevoir l'évolution des concepts mathématiques.

En utilisant l'histoire au primaire, face à des élèves qui ont moins de 12 ans, il faut pouvoir donner un sens à l'expression « l'an 1500 ». Pour s'intéresser à des faits historiques, il faut faire référence à des représentations d'une époque. Charbonneau (2002) propose d'utiliser des personnages d'histoires d'enfants tels que Tintin ou encore Astérix et Obélix. Même si ces personnages n'ont pas d'existence historique, ils renvoient à des époques précises : « En nous référant à eux, nous faisons référence à des images correspondant à leur époque ». Ainsi, il est possible d'intégrer l'histoire des mathématiques de différentes façons. Par exemple, un concept peut être introduit par une approche historique ou encore l'enseignant utilise une activité à caractère historique.

Il faut noter que l'histoire des mathématiques est présente explicitement dans les programmes québécois. C'est « l'occasion pour les élèves de percevoir l'évolution, le sens et

l'utilité (des mathématiques ...). Un survol historique peut aussi illustrer le fait que les savoirs mathématiques sont le fruit du long travail de mathématiciens passionnés par leur discipline. » Pour Charbonneau, ces programmes ont pour objectif d'aborder l'histoire de certaines notions pour faire le lien entre les mathématiques et les « besoins de la société », mais aussi afin que les élèves adoptent une « attitude favorable » vis-à-vis de la discipline.

L'histoire des mathématiques s'avère être un instrument pour une approche constructiviste des savoirs, comme réponse à des problèmes liés au contexte culturel et social d'une époque.

Par conséquent, la perspective historique permet-elle de pallier les difficultés rencontrées dans l'enseignement-apprentissage des nombres décimaux au cycle 3 ?

Dans la présente étude, il s'agit d'analyser le lien entre l'intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement-apprentissage des décimaux et l'appropriation du savoir par les élèves. Pour ce faire, cette étude a pour but de tester l'hypothèse générale suivante : **l'intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement-apprentissage des décimaux permet une meilleure appropriation du savoir par les élèves.**

II. Partie empirique

1) Population

L'action a lieu dans une école primaire publique REP+ en Martinique. L'échantillon concerne une classe de 19 élèves de CM1/CM2. Afin de mettre en place cette expérience, deux groupes sont constitués. Le groupe témoin est représenté par les cinq élèves scolarisés en CM2, dont deux élèves redoublants. L'âge moyen des CM2 est de 11 ans et 5 mois. Le groupe expérimental est constitué des quatorze élèves scolarisés en CM1, dont deux élèves redoublants. L'âge moyen des CM1 est de 10 ans et 3 mois.

2) Procédure

Pour tenter de vérifier l'hypothèse générale, la méthode quasi expérimentale semble la plus pertinente. L'expérimentation a pour but d'évaluer l'influence de l'histoire des mathématiques dans la compréhension des notions mathématiques portant sur les décimaux.

Concernant le groupe expérimental, l'enseignement des fractions et des nombres décimaux repose sur l'historique de leur apparition. Les élèves découvriront ces nouveaux nombres suivant la chronologie historique afin de créer les mêmes nécessités qui ont conduit les Hommes à étendre le champ numérique et à produire de nouvelles écritures.

L'expérience débute, pour ces élèves, dès la deuxième période pour permettre d'asseoir les notions sur le nombre, sur un temps d'enseignement relativement long. Nous nous intéresserons ici à trois séquences particulières s'étendant de la 2^{ème} période à la 4^{ème} période. Chaque notion est abordée à partir d'une situation d'apprentissage concrète faisant appel à des éléments de l'histoire des mathématiques. Puis, les séquences se poursuivent avec des séances d'entraînement qui sont des exercices d'application directe permettant de vérifier l'acquisition des connaissances.

Afin d'être le plus explicite possible, nous emploierons la codification suivante :

S_n (séquence) ; O_n (Objectif de la séquence) ; C_n (compétence spécifique).

Par exemple : $S_1O_3C_2$ fait référence à la compétence spécifique n°2 que l'élève doit effectuer en lien avec le 3^{ème} objectif de la séquence n°1.

a) Séquence n°1 : la numération décimale de position

La première séquence porte sur la numération décimale de position. En effet, pour introduire les fractions décimales, il semble primordial que les élèves aient une compréhension suffisante des relations qui existent entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines...) pour leur permettre de les étendre aux dixièmes, centièmes, comme le préconisent les programmes.

Les objectifs et les compétences spécifiques de la séquence n°1 sont donc les suivants :

- S_1O_1 : Comprendre et utiliser la numération égyptienne
 - C_1 : coder des nombres en numération égyptienne
 - C_2 : décoder des nombres écrits en numération égyptienne
- S_1O_2 : Découvrir l'échange 10 contre 1 comme moyen pour faciliter le dénombrement d'une grande collection
 - C_1 : dénombrer une grande collection en utilisant des groupements par dix et des échanges
- S_1O_3 : Connaître la valeur positionnelle des chiffres dans un nombre entier
 - C_1 : donner la position d'un chiffre dans un nombre entier à 4 chiffres (chiffre des unités, chiffres des dizaines, chiffres des centaines, chiffres des unités de milles)
 - C_2 : donner la valeur d'un chiffre dans un nombre entier à 4 chiffres (nombre d'unités, nombre de dizaines, nombre de centaines, nombre d'unités de milles)

Dans cette séquence, les élèves sont amenés à découvrir la numération égyptienne à partir de la première partie de l'histoire « Il était une fois le nombre » (Annexe I) qui leur sera projetée et racontée. Une situation-problème inspirée de la recherche de Champollion en 1882 leur sera proposée afin qu'ils déchiffrent l'écriture hiéroglyphique comme l'ont fait les égyptologues.

Ils pourront par la suite mettre en parallèle ce système et le nôtre, en comparant le nombre de symboles utilisé pour écrire un nombre, et la marque ou non de l'absence d'unités. En effet, il est important que les élèves comprennent l'intérêt d'organiser une collection selon des groupements de dix pour dénombrer rapidement et que l'écriture chiffrée traduit cette organisation.

C'est pourquoi, la compétence n°2 fait appel à l'utilisation de matériel pour s'approprier le fonctionnement de la numération décimale et les relations entre les différentes unités.

La situation-problème consiste à déterminer le nombre total de points représentés par un certain nombre d'étiquettes (soit 1, soit 10, soit 100, soit 1000, soit 10 000) contenues dans une enveloppe. Cette situation a pour but d'amener les élèves à faire des groupements de dix.

Dans un second temps, les élèves (par binôme) auront à leur disposition une « boîte d'échange » à cinq compartiments (une pour chaque rang d'unités). L'élève désigné comme « banquier » a pour mission de s'assurer que chaque étiquette 10, 100, 1000, ou 10 000 sont échangées contre le nombre adéquat d'étiquettes de l'enveloppe. A la fin de ces échanges, l'élève marque la somme correspondante au nombre convoqué par l'enveloppe (le nombre de chaque rang d'unités sera également écrit pour identifier s'il s'agit d'une erreur de calcul ou non). Chaque élève du binôme sera évalué sur 4 enveloppes.

Ainsi, le travail sur « nombre de... », « chiffre de... » est amorcé... Les élèves devront donc par la suite identifier la valeur de position d'un chiffre dans un nombre et reconnaître un nombre exprimé par le nombre de centaines et/ou de dizaines et/ou d'unités.

b) Séquence n°2 : les fractions décimales

Ensuite, une séquence portant sur les fractions dites simples sera menée afin d'introduire la notion de fraction-partage et le vocabulaire associé. Les apprenants seront amenés à répondre à des situations concrètes de comparaison en mesurant des longueurs, de fractionnement en mesurant des aires et d'approximation de repérage de points. Mais elle ne fera pas l'objet d'étude ici, car nous souhaitons cibler le cas particulier des fractions décimales.

Nous nous intéressons donc à la séquence qui présente les fractions décimales. Pour introduire ce concept, nous poursuivrons avec la deuxième partie de l'histoire « Il était une fois le nombre » (Annexe II). Les élèves découvriront que l'Homme a dû utiliser des fractions pour mesurer des objets qui n'avaient pas une longueur « exacte » en reportant son objet étalon. Ainsi, il a dû partager son unité en 10, puis en 100 pour pouvoir mesurer de façon plus précise.

Les objectifs et les compétences spécifiques de la séquence n°2 sont les suivants :

- S_2O_1 : Comprendre et utiliser la notion de fraction décimale
 - C_1 : Représenter en coloriant des fractions décimales supérieures à 1
 - C_2 : Décomposer des fractions décimales en somme d'un nombre entier et d'une fraction décimale inférieure à 1
 - C_3 : Repérer des fractions décimales sur une demi-droite graduée adaptée
 - C_4 : Placer des fractions décimales sur une demi-droite graduée adaptée

Dans cette séquence, le groupe expérimental devra essentiellement représenter des fractions décimales à l'aide de situations d'approximation de repérage de points sur une demi-droite graduée. En effet, ici, c'est la conception de la fraction-partage (nombre total de parts donné par le dénominateur et le nombre de parts que l'on prend donné par le numérateur) qui est défini pour l'écriture du nombre décimal. Les significations données à la fraction s'opèrent progressivement à travers ce fractionnement de l'unité. Ainsi, ces différentes situations permettent une approche des fractions en tant que nombre pouvant se placer sur une droite numérique.

c) Séquence n°3 : les nombres décimaux

La dernière séquence de l'expérimentation porte sur le nombre décimal. Si l'écriture à virgule est une convention, nous constatons, avec nos lectures précédentes, qu'elle est souvent vide de sens pour les élèves. C'est pourquoi, il nous semble important de partir de la découverte de Simon Stevin pour mieux comprendre l'évolution de l'écriture des nombres décimaux et y apporter du sens.

Les objectifs et les compétences spécifiques de la séquence n°3 sont les suivants :

- S_3O_1 : Identifier la partie décimale et la partie entière de la notation décimale donnée par Simon Stevin
 - C_1 : Ecrire le nombre décimal selon la notation de Stevin correspondant à la fraction décimale
 - C_2 : Ecrire la fraction décimale correspondant au nombre décimal selon la notation de Stevin

- S_3O_2 : Connaitre l'équivalence entre l'écriture fractionnaire et l'écriture à virgule d'un nombre décimal ($1/100^{\text{ème}}$)
 - C_1 : Passer d'une fraction décimale à une écriture à virgule
 - C_2 : Passer d'une écriture à virgule à une fraction décimale

- S_3O_3 : Connaitre la valeur positionnelle des chiffres dans un nombre décimal
 - C_1 : Donner la position d'un chiffre dans un nombre décimal (chiffre des unités, chiffres des dizaines, chiffres des dixièmes, nombre de centièmes)
 - C_2 : Donner la valeur d'un chiffre dans un nombre décimal (nombre d'unités, nombre de dizaines, nombre de dixièmes, nombre de centièmes)

Les élèves approfondiront ainsi leurs connaissances sur l'évolution des nombres et percevront les relations entre l'unité et les décimales. A partir d'un extrait de *La Disme* de Simon Stevin (Annexe III), les apprenants devront coder et décoder des nombres décimaux.

Ainsi, les élèves devront identifier chaque chiffre à partir de l'ancienne écriture puis avec notre vocabulaire et écriture décimale actuels. Par groupe de trois, chaque élève doit communiquer un nombre décimal. Un élève écrit un nombre à la manière de Stevin, présente ce qu'il a écrit à ses deux équipiers : le deuxième le répond par le nombre égal écrit en lettres et le troisième, sous forme de fraction décimale.

Les élèves sont ainsi amenés à faire le lien entre les fractions décimales et l'écriture des nombres décimaux en s'appuyant sur les décompositions dans le but de mieux comprendre ce qu'est la partie entière et décimale d'un nombre décimal.

Différents activités d'associations seront donc donnés aux élèves afin de vérifier si le lien entre les diverses désignations a été établi.

d) Groupe témoin

Dès la première période, un pré-test sera donné aux élèves de CM2 afin d'évaluer leurs acquis du CM1 sur les fractions et nombres décimaux.

Ce pré-test est conçu à partir des progressions de 2008 (en vigueur l'année précédente), en s'appuyant sur les repères donnés pour le niveau CM1 en nombres et calculs. Le pré-test (Annexe IV, V et VI) présente les éléments de connaissances et de compétences suivants :

- S_{RO1} : Comprendre et utiliser la notion de fraction décimale (jusqu'au $1/100^{\text{ème}}$)
 - C_1 : Placer des nombres décimaux sur une demi-droite graduée adaptée
 - C_2 : Repérer des nombres décimaux sur une demi-droite graduée adaptée
- S_{RO2} : Connaitre l'équivalence entre l'écriture fractionnaire et l'écriture à virgule d'un nombre décimal (jusqu'au $1/100^{\text{ème}}$)
 - C_1 : Passer d'une fraction décimale à une écriture à virgule
 - C_2 : Passer d'une écriture à virgule à une fraction décimale
- S_{RO3} : Connaître la valeur de chacun des chiffres d'un nombre décimal en fonction de sa position (jusqu'au $1/100^{\text{ème}}$)
 - C_1 : Donner la position d'un chiffre dans un nombre décimal (chiffre des unités, chiffres des dizaines, chiffres des dixièmes, nombre de centièmes)
 - C_2 : Donner la valeur d'un chiffre dans un nombre décimal (nombre d'unités, nombre de dizaines, nombre de dixièmes, nombre de centièmes)

Ces éléments ont également été sélectionnés par rapport aux compétences travaillées par les élèves de CM1 à la fin de la période 4.

En effet, après avoir suivi l'enseignement, les élèves de CM1 seront évalués (post-test) sur les mêmes exercices donnés au groupe témoin afin de pouvoir étudier l'impact éventuel de l'intégration de l'histoire des mathématiques sur l'appropriation des notions citées précédemment.

3) Outils de mesure

Les situations d'évaluation formative et sommative servent d'outils de mesure permettant de valider ou non l'hypothèse.

Evaluer les compétences suppose, en un instant T, à apprécier le niveau d'acquisition d'un élève. Pour cela, la forme de l'outil doit permettre de mettre à l'épreuve les savoirs et savoir-faire des élèves ; c'est pourquoi les exercices d'application directe et le post-test constituent cet outil de mesure.

En effet, ceux-ci permettent de traiter des éléments observables afin d'estimer un niveau de compétence pour chaque élève.

Chaque exercice est évalué selon 5 échelles :

- code 5, lorsque l'élève obtient plus de 90% de réponses exactes, la compétence est considérée comme stabilisée
- code 4, lorsque l'élève obtient des résultats corrects compris entre 89% et 75%, la compétence est considérée comme maîtrisée
- code 3, si le taux de bonnes réponses est compris entre 74% et 51%, dans ce cas la compétence est en cours d'acquisition
- code 2, lorsque le nombre de réponses correctes est compris entre 50% et 25%
- code 1, si le nombre de réponses correctes est inférieur à 25%, la notion est non acquise

4) Résultats

Afin d'examiner si, conformément à notre hypothèse, l'intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement-apprentissage des décimaux permet une meilleure appropriation du savoir par les élèves, nous avons soumis les scores obtenus à une étude statistique.

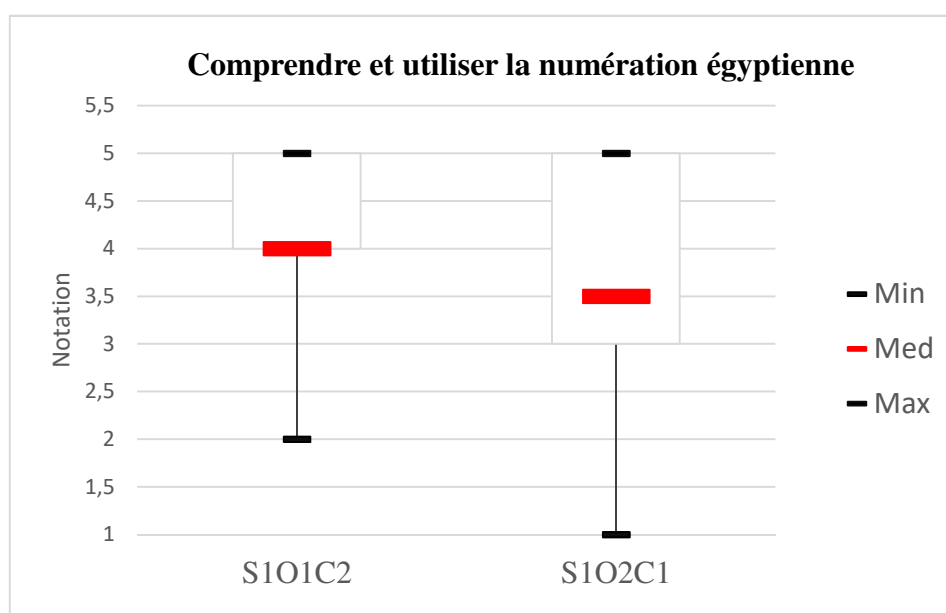
Dans un premier temps, les résultats du groupe expérimental seront présentés en utilisant un box-plot afin de pouvoir résumer, sous forme d'un graphique, la dispersion de l'échantillon. Nous avons ainsi une lecture directe de la répartition des nombres de la série statistique (médiane, 1^e et 3^e quartiles, code minimum et maximum de l'échantillon). De façon générale, plus la boîte à moustache est étendue, plus la série statistique est dispersée.

D'autre part, nous préciserons cette présentation avec les calculs des moyennes obtenues en évaluant les compétences spécifiques ; la série statistique ne présentant pas de valeurs extrêmes. Nous compléterons ces constats avec un recensement des erreurs les plus fréquentes (le cas échéant) retrouvées dans les productions des élèves. En effet, certaines erreurs témoignent généralement d'une représentation erronée présente chez les élèves.

Enfin, nous comparerons les résultats obtenus entre le pré-test des CM2 ayant reçu un enseignement traditionnel et le post-test des CM1 à l'aide d'un test de Student. Pour ce faire, nous testerons l'égalité des variances à l'aide du test de Fisher. En fonction de l'homoscédasticité nous adapterons le test de Student adéquat.

Ce test permet de constater l'impact de l'intégration de l'histoire dans les mathématiques. Un box-plot nous permettra également de décrire les deux échantillons.

Concernant la séquence n°1 portant sur la numération décimale de position, nous pouvons constater les résultats suivants :



Graphique 1: Résultats obtenus pour les compétences $S_1O_1C_1$ et $S_1O_1C_2$

	Moyenne	Ecart-type
$S_1O_1C_1$	4,1	0,9
$S_1O_1C_2$	3,4	1,5
S_1O_1	3,8	1,3

Tableau 1: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences $S1O1C1$ et $S1O1C2$

La première compétence ($S_1O_1C_1$) consistant au codage de nombres en numération égyptienne a été réussie dans l'ensemble. 75 % des élèves ont au moins obtenu le code 4: ils n'ont donc pas éprouvé de grandes difficultés à transcrire en numération égyptienne les 10 nombres qui leur étaient proposés. La moyenne étant de 4,1% (σ : 0,9) confirme cette idée. Les erreurs les plus fréquentes se retrouvent face à des nombres qui nécessitent de nombreux symboles en numération égyptienne. Nous n'obtenons pas une erreur-type mais des oublis de hiéroglyphes.

Cependant, la deuxième compétence ($S_1O_1C_2$) mettant en avant le décodage de 10 nombres écrits en numération égyptienne a engendré un peu plus de difficultés. En effet, le

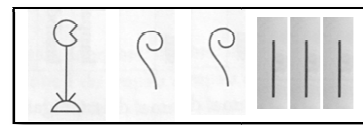
code médian est de 3,5 mais, contrairement à la première compétence, on observe une disparité plus importante avec un espace interquartile égal à 2 (contre 1 pour S₁O₁C₁).

La compétence S₁O₁C₂ n'est donc pas entièrement maîtrisée, mais en cours d'acquisition. Ce résultat est affirmé par la moyenne ; en effet, ce paramètre est de 3,4 (σ : 1,5).

Il faut noter tout de même que la notion est à revoir avec 25% des élèves. En effet ¼ de la classe a obtenu une note inférieure à 3.

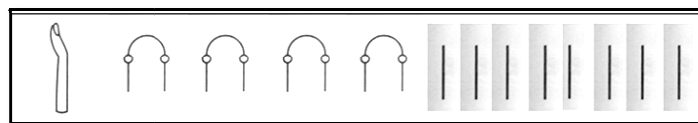
Les erreurs les plus fréquentes s'observent lorsqu'il s'agit de transcrire des nombres présentant un 0 dans notre écriture chiffrée.

Par exemple, 36% des élèves ont écrit « 123 » pour équivalent à 1 023.



qui

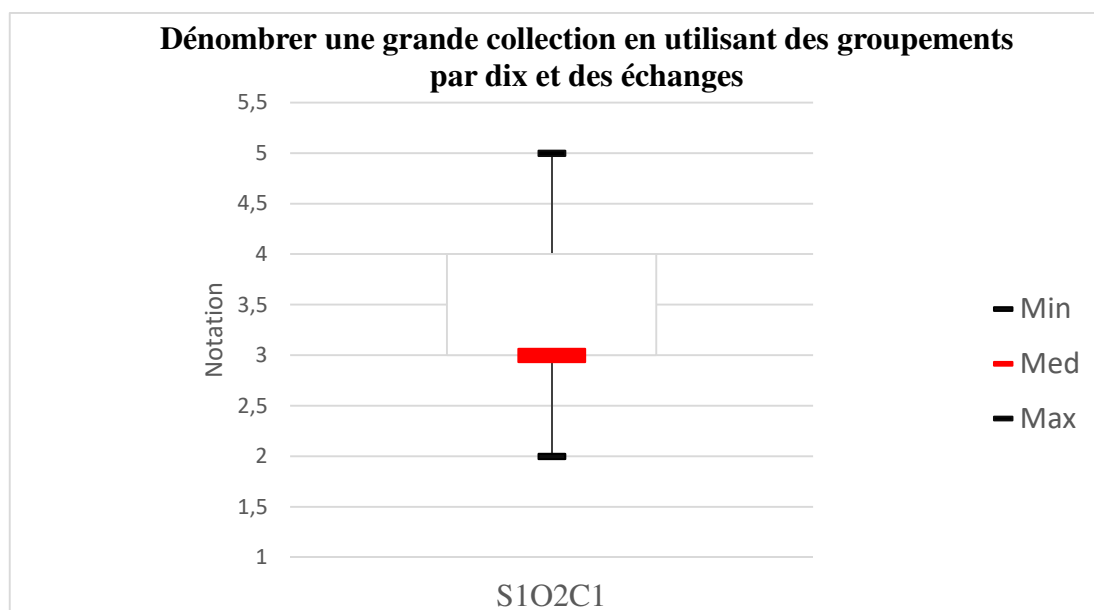
De même pour



qui signifie

« 10 048 », mais qui obtient des réponses plus hétérogènes : « 148 », « 100048 », « 1408 ».

Compte-tenu des résultats cités ci-dessus, il est judicieux de s'intéresser à l'atteinte de cet objectif n°1 dans son ensemble. En effet, les élèves obtiennent une moyenne de 3,8 (σ : 1,3). Cet indice met en exergue l'acquisition quasi-totale de la compétence (code 4 : compétence maîtrisée). Cependant, l'étude distincte des deux compétences spécifiques de l'objectif révèle qu'une d'entre elles est mieux maîtrisée par les apprenants.



Graphique 2: Résultats obtenus pour la compétence S₁O₂C₁

	Moyenne	Ecart-type
S ₁ O ₂ C ₁	3,3	1,0

Tableau 2: Moyenne et écart-type calculés pour la compétence S₁O₂C₁

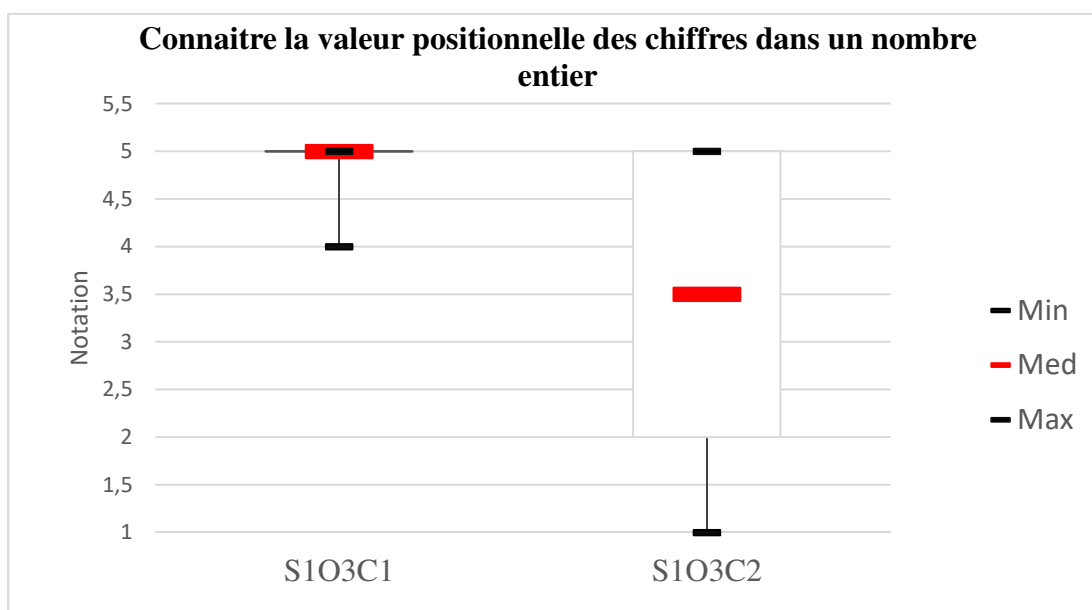
Nous rappelons que cette deuxième compétence fait référence à une situation de manipulation de matériel afin de découvrir le fonctionnement de la numération décimale.

Concernant la première compétence, 75% des élèves ont au-dessus du code 3 (code 3 compris) : la compétence est donc au moins en cours d'acquisition voire maîtrisée. Ceux-ci ont donc réussi à trouver le bon nombre convoqué par l'enveloppe plus d'une fois sur deux puisqu'ils ont obtenu un score supérieur à 3 (code 3 : 51% à 74% de réponses correctes). La moyenne étant de 3,3 (σ : 1,0) appuie ce résultat. La répartition des notes est plutôt homogène avec un interquartile égal à 1.

Les erreurs se multiplient lorsqu'il s'agit d'échanger un grand nombre d'unités en plusieurs dizaines ou un grand nombre de dizaines en plusieurs centaines.

Nous observons des erreurs récurrentes pour l'enveloppe dévoilant une somme égale à 4052. En effet, 43% des élèves proposent le nombre 452.

Cette compétence n°2 est donc à peu près maîtrisée avec 3,3 de moyenne (σ : 1,1).



Graphique 3: Résultats obtenus pour les compétences S₁O₃C₁ et S₁O₃C₂

	Moyenne	Ecart-type
S ₁ O ₃ C ₁	4,9	0,3
S ₁ O ₃ C ₂	3,4	1,4
S ₁ O ₃	4,1	1,3

Tableau 3: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences S₁O₃C₁ et S₁O₃C₂

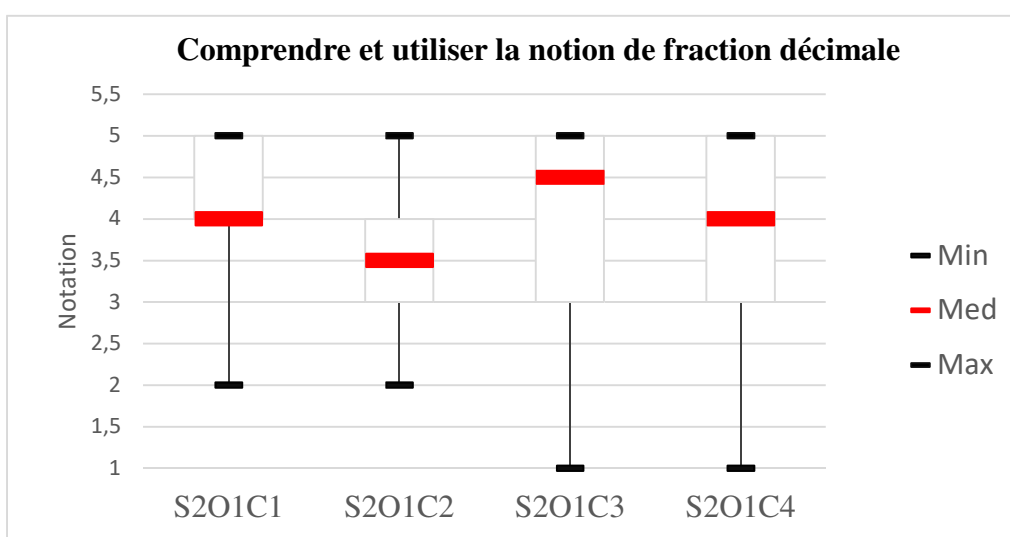
Pour ce 3^{ème} objectif, la compétence (S₁O₃C₁) consistant à donner la position d'un chiffre dans un nombre entier à 4 chiffres a été réussie par plus de 90% des élèves. La distribution des notes est très restreinte avec la quasi-totalité des élèves ayant obtenu le code 5 : cette notion est donc stabilisée. La moyenne égale à 4,9 avec un écart-type faible soit 0,3 appuie ce constat.

La compétence S₁O₃C₂, quant à elle reposait sur la valeur des chiffres dans un nombre entier à 4 chiffres. Nous constatons que 25% des élèves ont en-dessous du code 2 (la notion est à revoir). Toutefois, dans l'ensemble, la notion est en cours d'acquisition voire maîtrisée avec la médiane égale à 3,5. La moyenne de 3,4 (σ : 1,4) soutient ce résultat. Cependant, il faut noter que la distribution des notes est très étendue avec un écart interquartile de 3.

Très peu d'erreurs concernent la confusion entre le chiffre et le nombre. Toutefois 20% des élèves éprouvent des difficultés pour les nombres contenant un 0 : ils marquent « 76 » pour le nombre de centaines dans 76 029 ou d'autres ne proposent pas de réponses.

Ce 3^{ème} objectif semble être atteint dans son ensemble. En effet, les élèves obtiennent un score moyen de 4,1 (σ : 1,3). Cependant, l'observation distincte des résultats des deux compétences de l'objectif révèle que l'une d'entre elles est mieux maîtrisée par les apprenants.

Nous observons les scores suivants pour la séquence n°2 portant sur les fractions décimales:



Graphique 4: Résultats obtenus pour les compétences S₂O₁C₁, S₂O₁C₂, S₂O₁C₃ et S₂O₁C₄

	Moyenne	Ecart-type		Moyenne	Ecart-type
S ₂ O ₁ C ₁	4,1	0,9	S ₂ O ₁ C ₃	4,0	1,2
S ₂ O ₁ C ₂	3,6	0,9	S ₂ O ₁ C ₄	3,7	1,3

Tableau 4: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences S₂O₁C₁, S₂O₁C₂, S₂O₁C₃ et S₂O₁C₄

Rappelons que :

- S₂O₁C₁ : Représenter en coloriant des fractions décimales supérieures à 1.
- S₂O₁C₂ : Décomposer des fractions décimales en somme d'un nombre entier et d'une fraction décimale inférieure à 1.
- S₂O₁C₃ : Repérer des fractions décimales sur une demi-droite graduée adaptée
- S₂O₁C₄ : Placer des fractions décimales sur une demi-droite graduée adaptée

Nous observons des scores satisfaisants pour cet objectif amenant l'élève à s'approprier la notion de fraction décimale. Nous pouvons esquisser des hypothèses vis-à-vis des résultats ; en effet la chronologie des séquences dans les semaines précédentes nous a amené à étudier les fractions simples (comme cité dans la partie « Procédure »).

Concernant les compétences spécifiques mentionnées sur ce graphique, nous constatons une répartition homogène des scores pour les deux premières. En effet, représenter en coloriant des fractions décimales supérieures à l'unité est une compétence maîtrisée voire stabilisée chez les élèves (code médian égal à 4).

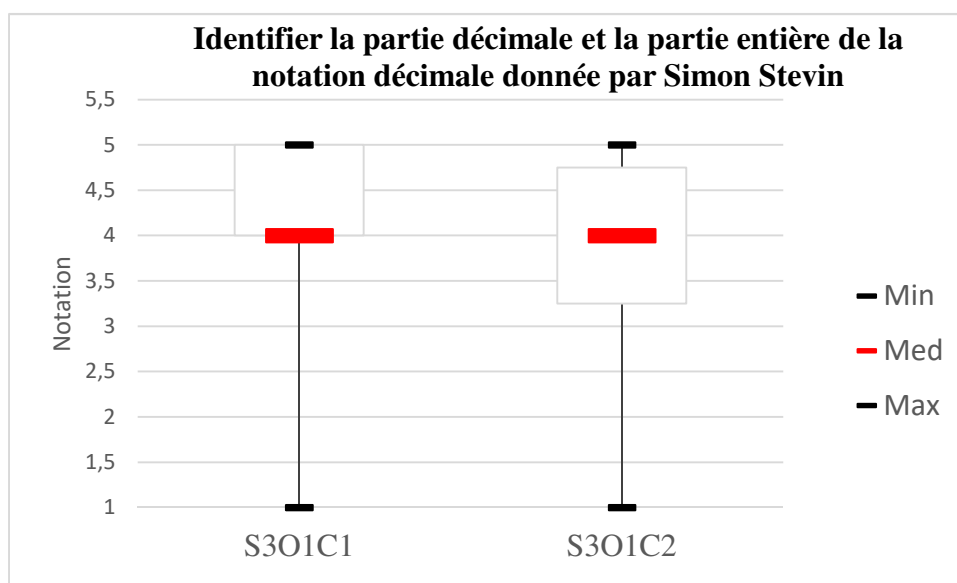
Bien qu'ayant des moyennes quasi-similaires à celles-ci ($\mu \approx 4$), les compétences S₂O₁C₃ et S₂O₁C₄ (Annexe VII) présentent une répartition plus disparate des résultats. D'ailleurs, l'écart interquartile Q₃-Q₁ pour la S₂O₁C₃ est égal à 2 tandis qu'il est de moitié moins pour les deux premières compétences. Si des élèves réussissent S₂O₁C₃ et S₂O₁C₄ plus facilement que les deux premières tâches, d'autres, au contraire, éprouvent plus de difficultés.

S₂O₁C₂ reposant sur la décomposition d'une fraction décimale en somme d'un entier et d'une fraction décimale révèle les résultats les plus bas avec un code médian et une moyenne égale à 3,5 ($\sigma : 0,9$).

Nous constatons 29% des élèves confondent entier et fraction décimale : ils ne perçoivent pas

$$\frac{27}{10} = \frac{20}{10} + \frac{7}{10} \text{ mais proposent } \frac{2}{10} + \frac{7}{10}.$$

Pour la 3^{ème} séquence, nous obtenons les résultats suivants :



Graphique 5: Résultats obtenus pour les compétences S₃O₁C₁ et S₃O₁C₂

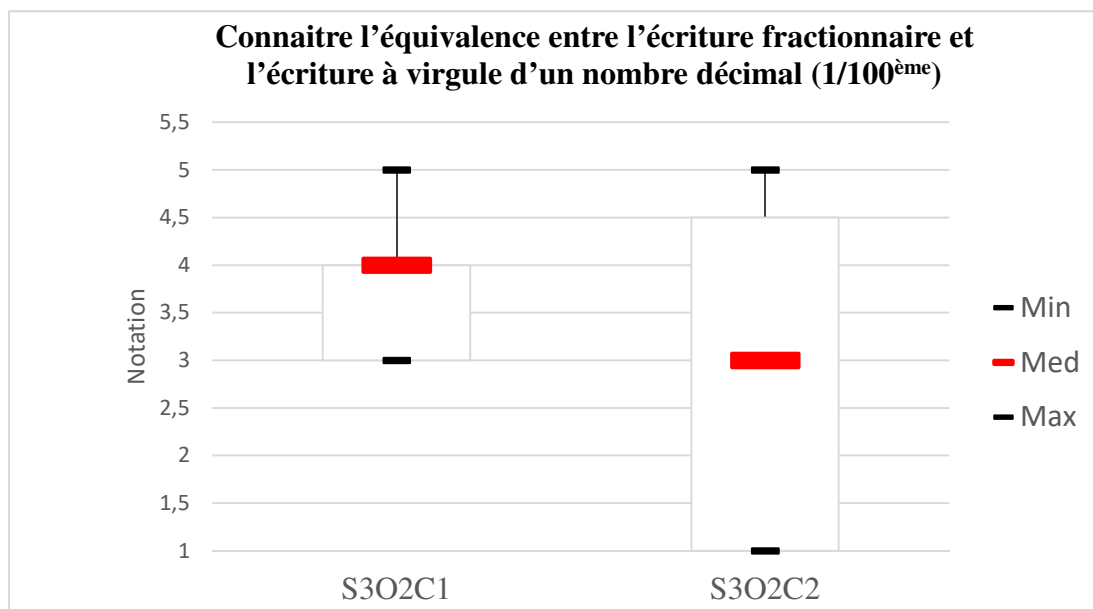
	Moyenne	Ecart-type
S ₃ O ₁ C ₁	4,1	1,2
S ₃ O ₁ C ₂	3,8	1,1
S ₃ O ₁	3,9	1,2

Tableau 5: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences S₃O₁C₁ et S₃O₁C₂

Nous rappelons que les compétences de cette séquence ont été travaillées à partir d'une activité ludique, par groupe de trois (Annexe VIII). Concernant la première compétence S₃O₁C₁ « Ecrire le nombre décimal (selon la notation de Stevin) correspondant à la fraction décimale », l'échantillon obtient un code médian de 4. Nous pouvons déduire que 50% des élèves maîtrisent cette compétence puisqu'ils ont au-dessus de 4; la moyenne de 4,1 (σ : 1,2). confirme ce constat.

Outre cela, la distribution des notes est très homogène, l'écart interquartile Q3-Q1 étant de 1.

Les résultats obtenus pour la deuxième compétence ($S_3O_1C_2$) sont un peu plus hétérogènes avec un intervalle interquartile $Q_3-Q_1 \approx 1,5$. Mais la compétence semble également maîtrisée avec un code médian égal à 4.



Graphique 6: Résultats obtenus pour les compétences $S_3O_2C_1$ et $S_3O_2C_2$

	Moyenne	Ecart-type
$S_3O_2C_1$	3,8	0,8
$S_3O_2C_2$	2,9	1,6
S_3O_2	3,3	1,4

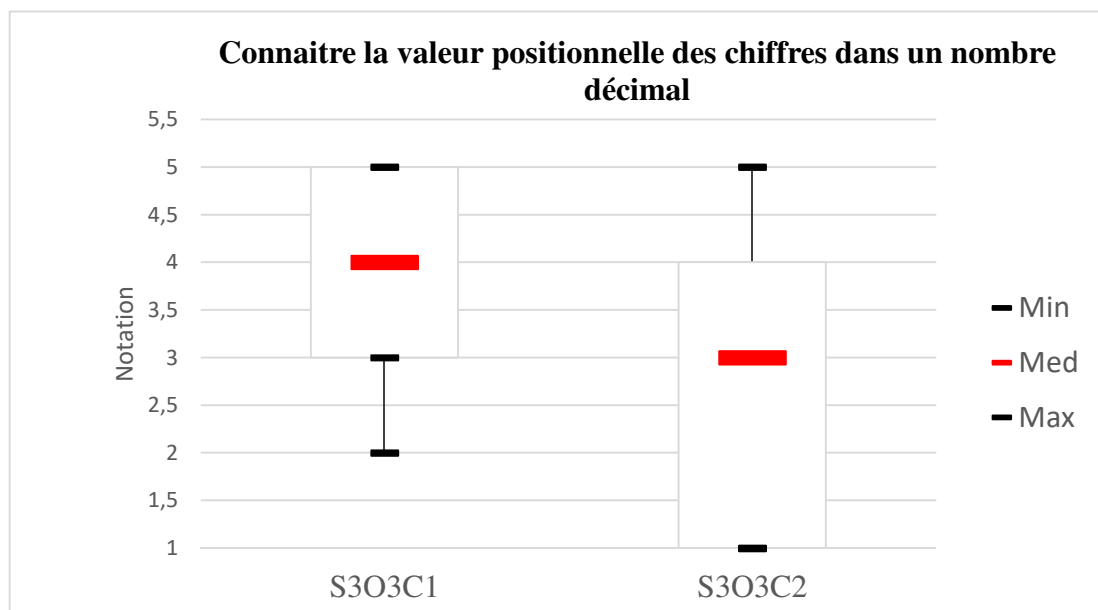
Tableau 6: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences $S_3O_2C_1$ et $S_3O_2C_2$

L'activité révélée par $S_3O_2C_1$ a été menée à bien par l'ensemble des élèves avec un code médian de 4 et une moyenne de 3,8 ($\sigma : 0,8$). De plus, l'appréciation minimale étant de 3, la compétence « Passer d'une fraction décimale à une écriture à virgule » est au moins en cours d'acquisition. 50% des élèves quant à eux ont au-dessus du code 4 (code 4 compris), la compétence est donc considérée comme maîtrisée voire stabilisée pour ceux-ci.

Cependant, la deuxième compétence $S_3O_2C_2$ (passer d'une écriture à virgule à une fraction décimale) est moins bien réussie avec un code médian égal à 3. 50% de l'échantillon a obtenu le code 3 ou un code inférieur, la notion est donc en cours d'acquisition et même à revoir avec certains élèves. D'ailleurs, la répartition des notes est très hétérogène que $S_3O_2C_1$ avec un interquartile Q3-Q1 égal à 3,5.

En effet, la notion est non acquise avec 29 % des élèves qui assimilent la virgule à la barre de fraction. Ils proposent par exemple $\frac{4}{2}$ pour le nombre décimal 4,2.

Si l'objectif S_3O_2 a révélé une moyenne de 3,3 ($\sigma : 1,1$), il convient de noter que l'une d'entre elles est mieux maîtrisée par les apprenants. En effet, les élèves semblent rencontrer plusieurs obstacles lorsqu'il s'agit d'écrire des nombres décimaux sous forme de fraction décimale.



Graphique 7: Résultats obtenus pour les compétences $S_3O_3C_1$ et $S_3O_3C_2$

	Moyenne	Ecart-type
$S_3O_3C_1$	3,9	1,0
$S_3O_3C_2$	2,7	1,5
S_3O_3	3,3	1,4

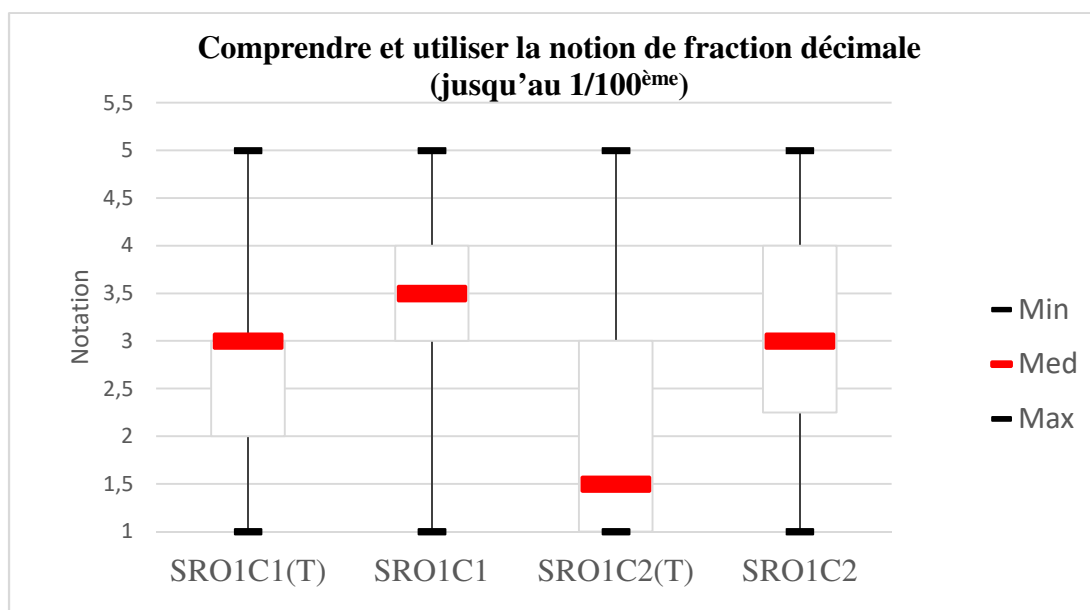
Tableau 7: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences $S_3O_3C_1$ et $S_3O_3C_2$

En observant le graphique ci-dessus, nous constatons que la compétence $S_3O_2C_1$ est mieux maîtrisée par les élèves ; le code médian étant de 4 (50% des élèves ont au moins obtenu le code 4). La moitié des élèves parviennent donc à donner la position d'un chiffre dans un nombre décimal (chiffre des unités, chiffres des dizaines, chiffres des dixièmes, nombre de centièmes). Cependant, l'écart interquartile égal à 2 montre la dispersion des résultats. En effet, la notion s'avère non acquise pour 25 % des élèves (ayant obtenu un code inférieur à 3) qui assimilent les décimaux à des entiers : par exemple pour le nombre décimal 653,92 : « 2 est le chiffre des unités » (Annexe IX).

La compétence $S_3O_2C_2$ (donner la valeur d'un chiffre dans un nombre décimal) est en cours d'acquisition avec un code médian et un code moyen ≈ 3 ($\sigma : 1,5$). Ici, le code minimal est de 1 et 50% des élèves ont au-dessous de 3 (code 3 compris). Les élèves éprouvent notamment des difficultés à trouver le nombre de dixièmes et de centièmes dans un nombre décimal. La distribution des notes est très hétérogène également avec un interquartile égal à 3.

Cet objectif n°3 est en cours d'acquisition dans l'ensemble avec une moyenne de 3,0 ($\sigma : 1,6$). Cependant, l'étude distincte des deux compétences spécifiques de l'objectif révèle que l'une d'entre elles est légèrement mieux maîtrisée par les apprenants.

Un même test a été proposé aux élèves de CM1 et CM2, nous obtenons les résultats suivants :



Graphique 8: Résultats obtenus pour les compétences $S_{RO_1C_1}$ et $S_{RO_1C_2}$ pour le groupe témoin (T) et le groupe expérimental

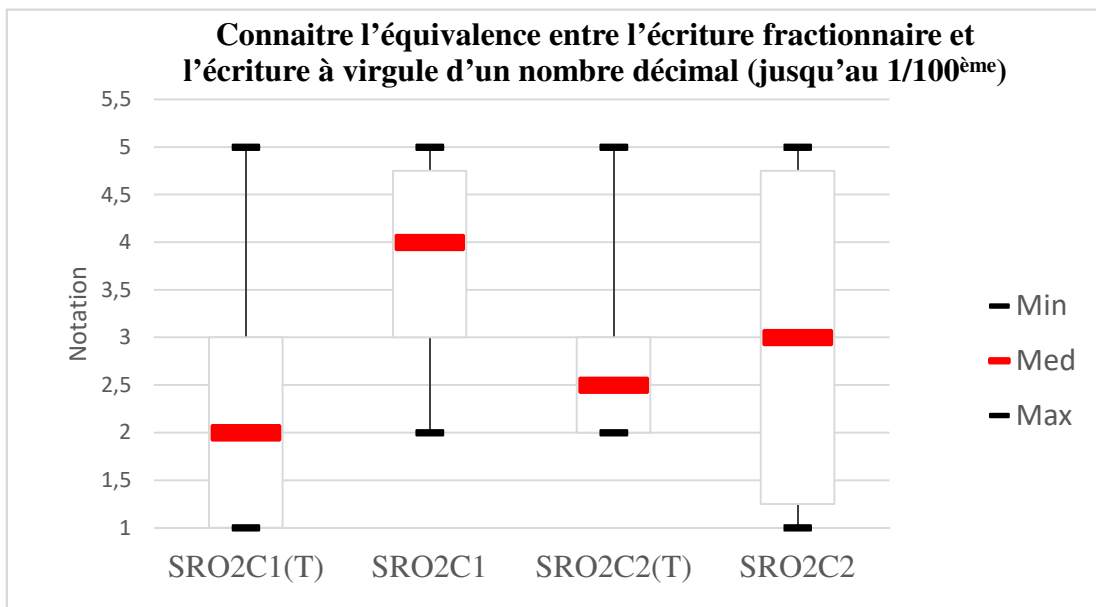
	Moyenne	Ecart-type
$S_{RO_1C_1}(T)$	2,8	1,5
$S_{RO_1C_2}(T)$	2,4	1,7
$S_{RO_1}(T)$	2,6	1,5

	Moyenne	Ecart-type
$S_{RO_1C_1}$	3,5	1,2
$S_{RO_1C_2}$	3,4	1,3
S_{RO_1}	3,4	1,2

Tableau 8: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences $S_{RO_1C_1}$ et $S_{RO_1C_2}$ pour le groupe témoin (T) et le groupe expérimental

Pour cet objectif, le groupe témoin a obtenu une moyenne générale inférieure au groupe expérimental. D'ailleurs, pour la compétence $S_{RO_1C_1}$, nous n'observons aucun chevauchement de l'espace interquartile Q3-Q1 pour les deux groupes. Si pour le groupe expérimental, 75% des élèves sont au moins en cours d'acquisition de la compétence (avec un code supérieur ou égal à 3), dans le groupe témoin, ils ne sont que 50% à dépassé ce palier. La répartition des notes dans les deux cas reste tout de même homogène.

En ce qui concerne la deuxième compétence, nous pouvons observer que le groupe expérimental a un code médian deux fois supérieur à celui du groupe témoin. 50 % des élèves de CM2 n'ont pas réussi à dépasser l'appréciation 3. Nous pouvons mettre en lumière la difficulté des élèves vis-à-vis de cette compétence qui doit être retravaillée avec plus de la moitié de la classe (code médian égal à 1,5).



Graphique 9: Résultats obtenus pour les compétences $S_{RO_3C_1}$ et $S_{RO_3C_2}$ pour le groupe témoin (T) et le groupe expérimental

	Moyenne	Ecart-type
$S_{R}O_2C_1(T)$	2,6	1,7
$S_{R}O_2C_2(T)$	3	1,2
$S_{R}O_2(T)$	2,8	1,4

	Moyenne	Ecart-type
$S_{R}O_2C_1$	3,6	1,2
$S_{R}O_2C_2$	3,1	1,6
$S_{R}O_2$	3,4	1,4

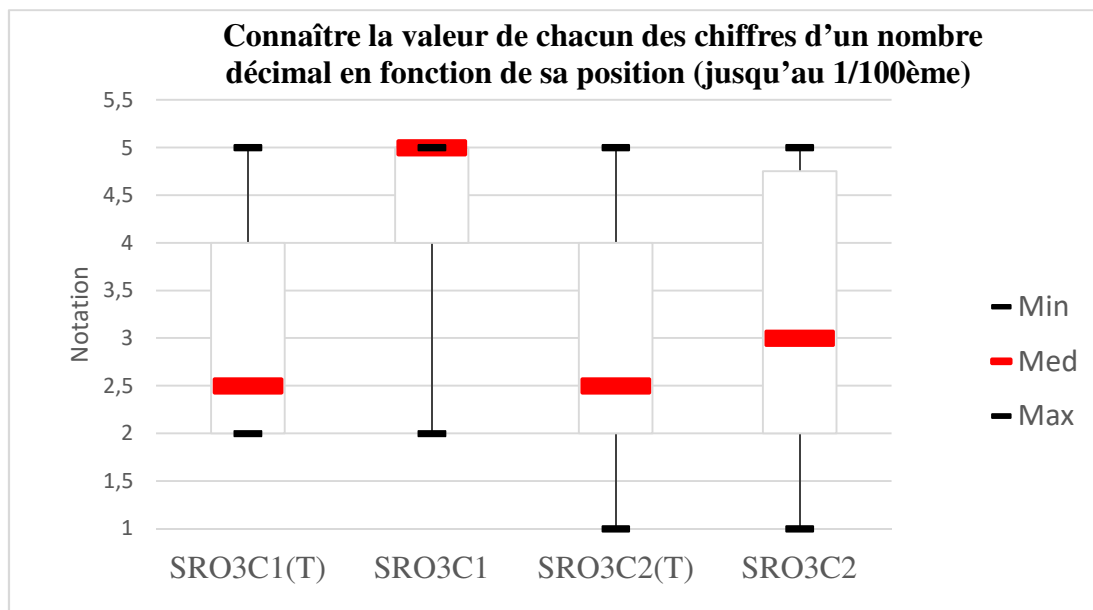
Tableau 9: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences $S_{R}O_2C_1$ et $S_{R}O_2C_2$ pour le groupe témoin (T) et le groupe expérimental

Concernant ce deuxième objectif, nous remarquons a priori une différence au niveau de l'acquisition de $S_{R}O_2$ par les deux groupes avec 2,8 (σ : 1,4) pour le groupe témoin et 3,6 (σ : 1,1) pour le groupe expérimental.

Pour la première compétence, le groupe expérimental obtient des résultats supérieurs à ceux du groupe témoin (médiane et moyenne). Les CM1 obtiennent un code médian de 4, ce qui reflète la maîtrise de la compétence visée pour la moitié de la classe alors qu'il est de 2 pour les CM2.

En effet, nous observons à l'aide du graphique que la compétence « Passer d'une fraction décimale à une écriture à virgule » est au moins en cours d'acquisition pour 75% des élèves du groupe expérimental alors qu'elle ne l'est que pour 25% pour le groupe témoin. Nous n'observons aucun chevauchement des intervalles interquartile Q3-Q1 entre les deux groupes ; toutefois, la répartition des notes est hétérogène dans les deux groupes avec un écart interquartile égal à 2.

S'agissant de la compétence $S_{R}O_2C_2$ (Passer d'une écriture à virgule à une fraction décimale), le groupe expérimental obtient des résultats à peine supérieurs à ceux du groupe témoin. Dans l'ensemble, la compétence semble être en cours d'acquisition avec une moyenne ≈ 3 (σ_T : 1,2) et (σ : 1,6) pour les deux groupes. L'écart-type et le graphique montrent une dispersion des résultats plus importante pour le groupe expérimental. De plus, la note minimale est 2 chez les CM2 alors qu'il est de 1 pour les CM1.



Graphique 10: Résultats obtenus pour les compétences $S_{RO_3C_1}$ et $S_{RO_3C_2}$ pour le groupe témoin (T) et le groupe expérimental

	Moyenne	Ecart-type		Moyenne	Ecart-type
$S_{RO_3C_1}(T)$	3,2	1,3	$S_{RO_3C_1}$	4,4	0,9
$S_{RO_3C_2}(T)$	3	1,6	$S_{RO_3C_2}$	3,2	1,4
$S_{RO_3}(T)$	3,1	1,4	S_{RO_3}	3,8	1,3

Tableau 10: Moyennes et écarts-types calculés pour les compétences $S_{RO_3C_1}$ et $S_{RO_3C_2}$ pour le groupe témoin (T) et le groupe expérimental

A travers cet objectif nous pouvons déceler une différence au niveau de l'apprentissage de $S_{RO_3C_1}$ (donner la position d'un chiffre dans un nombre décimal). En juxtaposant les box-plot des deux groupes, nous observons une distinction au niveau de la répartition des appréciations. Tout d'abord, il n'y a pas de chevauchement des intervalles interquartile Q3-Q1 entre les deux groupes. Le groupe expérimental obtient des notes supérieures à ceux du groupe témoin (note minimale, médiane, moyenne). En effet, il est important de souligner cette différence qu'il existe entre les deux groupes d'étude. Le groupe expérimental obtient un code médian de 5, ce qui reflète la stabilisation de la compétence

visée, tandis que le groupe témoin peine à dépasser le code 2,5 pour la moitié de la classe. Autre point, la répartition des notes est plus disparate pour le groupe témoin avec un écart interquartile Q3-Q1 égal à 2 contre 1 pour l'autre groupe.

Outre une médiane légèrement supérieure pour le groupe expérimental (seul 0,5 point sépare les groupes sur ce critère), seule la dispersion des résultats des élèves peut être soulignée en ce qui concerne $S_{R}O_3C_2$ (donner la valeur d'un chiffre dans un nombre décimal). En effet, nous passons d'un intervalle entre les Q3 et Q1 de 1 pour le groupe expérimental et à 2 pour le groupe témoin.

Afin de pouvoir appréhender l'impact de l'intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement-apprentissage des décimaux, nous avons réalisé un test statistique de comparaison des moyennes : le test de Student. En effet, les résultats des élèves ont été comparés compétences par compétences en confrontant le groupe témoin au groupe expérimental. Ce test disposant de plusieurs modalités dépendantes de l'homoscédasticité, un test de Fisher a été mis en place au préalable.

p-values	$S_{R}O_1C_1$	$S_{R}O_1C_2$	$S_{R}O_2C_1$	$S_{R}O_2C_2$	$S_{R}O_3C_1$	$S_{R}O_3C_2$
Test Fischer	0,45	0,41	0,27	0,61	0,12	0,69
Test Student bilatéral	0,30	0,20	0,14	0,93	0,02	0,78
Test Student unilatéral	-	-	-	-	0,01	-

Tableau 11: Comparaison des moyennes entre le groupe témoin (T) et le groupe expérimental

Le tableau ci-dessus nous expose les p-value des différents tests : cette p-value est à comparer avec le seuil de 0,05 (risque α). Si elle est supérieure, on ne rejette pas H_0 . En cas de variances exactement égales, test F donne 1 ; en revanche, plus les variances sont différentes, plus la p-value tend vers zéro. La même méthodologie est appliquée pour le test de Student.

Sous l'hypothèse H_0 que les variances sont égales pour les deux échantillons (si $p\text{-value} > 0,05$), nous observons une homoscedasticité entre ces deux derniers puisque toutes les $p\text{-value}$ sont supérieures à 5%.

Le test de Student bilatéral nous permet d'observer si les moyennes des échantillons sont égales deux à deux. $S_{RO_3C_1}$ est la seule compétence qui n'est pas égale entre les deux groupes. Par conséquent les moyennes sont significativement différentes au risque de 5%. Partant de ce constat, nous avons cherché à savoir quel échantillon a obtenu la moyenne la plus élevée grâce à un test de Student unilatéral.

On pose les hypothèses suivantes :

- H_0 : le groupe témoin a une moyenne supérieure ;
- H_1 : le groupe témoin a une moyenne inférieure.

On obtient une $p\text{-value} = 0,01$ pour $S_{RO_3C_1}$.

Par conséquent, cette $p\text{-value} < 0,05$ nous permet de rejeter H_0 et d'accepter H_1 au risque de 5% : le groupe témoin a une moyenne inférieure à celle du groupe expérimental pour la compétence $S_{RO_3C_1}$ (donner la position d'un chiffre dans un nombre décimal : chiffre des unités, chiffres des dizaines, chiffres des dixièmes, nombre de centièmes).

D'autre part, en observant les $p\text{-values}$ des autres compétences, nous constatons que celles-ci sont relativement faibles pour des tests de Student bilatéraux. Par extrapolation, avec un test de Student unilatéral, nous obtenons des $p\text{-values}$ proches de 0,05 (avec 0,10 pour $S_{RO_1C_2}$ et 0,07 pour $S_{RO_2C_1}$).

Les moyennes sont donc relativement différentes d'un échantillon à un autre en ce qui concerne le repérage de nombres décimaux sur une demi-droite graduée adaptée ($S_{RO_1C_2}$) et le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture à virgule ($S_{RO_2C_1}$). A contrario, elles sont relativement identiques pour le passage de l'écriture à virgule à l'écriture fractionnaire ($S_{RO_2C_2}$; $p\text{-value} = 0,93$)

5) Discussion

Nous rappelons que la présente étude visait à répondre à la problématique suivante : la perspective historique permet-elle de pallier les difficultés rencontrées dans l'enseignement-apprentissage des nombres décimaux au cycle 3 ?

La synthèse générale des résultats statistiques tendent à confirmer notre hypothèse : l'intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement-apprentissage des décimaux permet une meilleure appropriation du savoir par les élèves. Néanmoins, certaines moyennes obtenues par le groupe expérimental, même si elles s'avèrent supérieures au groupe témoin, ne sont pas significatives comme nous avons pu le constater avec le tableau n°11. C'est le cas des compétences $S_{RO_1C_1}$ (placer des nombres décimaux sur une demi-droite graduée adaptée), $S_{RO_2C_2}$ (passer d'une écriture à virgule à une fraction décimale) et $S_{RO_3C_2}$ (donner la valeur d'un chiffre dans un nombre décimal).

$S_{RO_1C_1}$ supposait pour les deux groupes de connaître les notions de graduation régulière et savoir placer et repérer un nombre entier dans un premier temps sur une droite graduée puis une fraction décimale et ensuite les nombres décimaux. Ce pré-requis n'était peut-être pas assez stabilisé car si pour certains élèves, les erreurs étaient identifiables par leur décomposition additive pour d'autres, leurs erreurs semblent relever d'une difficulté de lecture de la demi-droite numérique.

Au sujet de $S_{RO_2C_2}$ (passer d'une écriture à virgule à une fraction décimale), nous rappelons que les moyennes obtenues étaient relativement identiques et révélaient que la compétence était en cours d'acquisition pour les deux groupes. Toutefois, en interrogeant les élèves sur leurs démarches, il semblerait que la méthode employée ne soit pas la même. Certains élèves du groupe témoin s'appuient sur la règle d'action suivante : « Pour diviser un nombre par 10 ou 100... je déplace la virgule de 1 ou de 2 rangs vers la gauche » et donc avancent par tâtonnement pour savoir s'il s'agit d'une fraction dont le dénominateur est 10 ou 100. A contrario, dans le groupe expérimental certains passent par des décompositions additives. Par exemple, pour 3,8 : « j'ai 3 unités et 8 dixièmes donc $3 + \frac{8}{10} = \frac{38}{10}$ » mais s'arrêtent souvent au niveau de la décomposition lorsque rares d'autres s'appuient sur la désignation orale : « 3,8 : 38 dixièmes donc $\frac{38}{10}$ ».

Enfin, $S_{RO_3C_2}$ (donner la valeur d'un chiffre dans un nombre décimal) n'avait en effet pas obtenue une différence significative. Il faut souligner que les difficultés par rapport à cette notion s'étaient déjà fait ressentir avec les entiers ; même si l'échantillon avait obtenu une moyenne et une médiane oscillant autour de 3,5 (donc 50% des élèves tendaient vers la maîtrise de cette compétence), la dispersion des résultats restait importante. Nous n'avons pas voulu biaiser notre démarche en utilisant le matériel de numération pour les nombres décimaux ; mais il semble évident que cet outil doit être utilisé en complément.

Concernant la compétence qui a obtenu une différence significative ($S_{RO_3C_1}$: donner la position d'un chiffre dans un nombre décimal), révèle que la confusion avec les entiers est moins présente. En effet, la partie décimale est rarement assimilée à un entier. Notons également, qu'un important travail a été réalisé sur le tableau de numération constituant un véritable outil pour les élèves. Mais, il aurait fallu poursuivre avec des exercices de comparaisons et d'intercalations pour réellement confirmer ce constat.

Autre point, la compétence $S_{RO_2C_1}$ (passer d'une fraction décimale à une écriture à virgule), qui par extrapolation, obtient un résultat relativement significatif, révèle également une certaine compréhension des nombres décimaux. En effet, (en majorité) la barre de fraction n'est pas assimilée à la virgule. Il faut souligner que le groupe expérimental s'aidait du tableau de numération et sur la désignation orale : « $\frac{23}{10}$ j'ai 23 dixièmes, je mets le chiffre 3 dans la colonne des dixièmes ».

Pour $S_{RO_1C_2}$ (repérer des nombres décimaux sur une demi-droite graduée adaptée), même si la moyenne obtenue par le groupe expérimental est légèrement supérieure, le code médian reste faible soit 3. Par conséquent, 50% des élèves ont, tout au plus, le code 3 (compétence en cours d'acquisition). Comme nous le précisons précédemment, il faudrait s'assurer que ce résultat n'est pas lié à la non maîtrise de la notion de graduation dans son ensemble. Notons tout de même que les élèves en situation de réussite utilisent le plus souvent l'écriture sous forme de décomposition additive pour le repérage de points sur une droite numérique car les chiffres peuvent être associés à des subdivisions successives.

Tout au long de notre étude, nous avons tout de même constaté que certaines erreurs récurrentes se rapprochent des obstacles historiques qu'ont rencontrés les mathématiciens jadis. C'est le cas du zéro : le fait d'exprimer l'absence de quantité par un nombre n'a pas été et n'est pas une évidence en soi. En effet, le zéro n'est pas un concept facile. Son statut en tant que chiffre mais également en tant que nombre a été tardive et lente.

Le zéro est utilisé comme un chiffre pour indiquer une place vide dans notre système de numération de position. Par exemple, Il permet de différencier 406 de 46. A noter qu'en 300 av. J.-C. les Babyloniens utilisaient deux barres obliques pour symboliser cette place vacante. Mais, ce sont les mathématiciens indiens qui ont introduit le zéro en tant que nombre, mais il faudra attendre le XIIe siècle en Occident. Néanmoins, le zéro a fait une entrée difficile dans le langage mathématique. Il souffre de la pensée aristotélicienne, mais aussi de la méfiance de l'Eglise ; le zéro représentant le vide.

Par conséquent, il existe des obstacles liés à la nature même de la connaissance, des difficultés que l'on retrouve dans le développement historique de cette dernière ; dont celles liées au zéro auquel s'ajoute le lien entre « décimal » et « fraction ».

En effet, il est difficile pour certains élèves de traiter les nombres décimaux comme des nombres : ils découvrent de nouveaux symboles tels que la barre de fraction et la virgule auxquels ils doivent donner du sens.

Si les Babyloniens disposaient de leur numération de position et les Egyptiens, des fractions, les nombres décimaux en tant que tels ne se sont démocratisés en Europe qu'au XVIe siècle grâce à Stevin (comme nous l'avions expliqué précédemment). De plus, dans les premiers programmes, les nombres décimaux sont associés à des nombres entiers par un changement d'unité. Ils ont longtemps été enseignés ainsi, en négligeant la compréhension mathématique, afin d'être diffusés largement pour être utilisés en comptabilité comme le soulignent A. Berté et *al.* (2013).

D'ailleurs, Artigue (1990) affirme dans son article que « l'analyse historique peut aider le didacticien dans sa recherche des nœuds de résistance de l'apprentissage ». Il serait donc plus avisé de faire intervenir des situations problèmes construites sur un objectif obstacle spécifique ; l'apprentissage ne relevant pas d'une seule activité mais d'une progression d'activités problèmes.

Comme toute étude, il faut reconnaître que celle-ci contient des limites et des biais.

D'une part, nos constats sont relatifs à la taille des deux échantillons. En effet, l'échantillonnage est crucial pour l'analyse des données. Ici, l'échantillonnage sur un petit nombre de sujets est à haut risque de biais. De plus, les deux groupes ne sont pas constitués du même nombre de participants.

Ensuite, il faut également reconnaître que ces notions sont, légitimement, en cours d'acquisition pour les élèves de CM2 à la première période puisque les connaissances et compétences acquises dans la classe antérieure sont toujours à consolider.

D'autre part, même si, les résultats ont été relevés à partir d'exercices réguliers faisant office d'évaluation formative ; nous sommes conscients que de demander à un élève de savoir faire quelque chose, au moment où l'enseignant le demande, n'est pas le moyen le plus fiable pour récolter les informations relatives à l'état de connaissances réel de l'élève.

De plus, nous pouvons souligner que la mise en place du dispositif s'est faite selon de nombreuses contraintes de terrain (présence sur 2 jours et demi, créneaux horaires). En effet, les performances cognitives ne sont pas stables, mais fluctuent selon des périodicités diverses journalières et hebdomadaires. Les séances avaient plutôt lieu le jeudi matin de 9h à 9h45 et le vendredi de 10h à 11h) alors qu'il semblerait que les performances mathématiques soient meilleures en fin de matinée puis en milieu d'après-midi (Testu et Baille, 1983).

Enfin, il serait intéressant d'évaluer les CM1 à la rentrée 2017, pour pouvoir comparer leurs acquis dans les mêmes conditions que les CM2.

Conclusion

Le dispositif pédagogique présenté aux élèves de CM1/CM2 avait pour objectif d'étudier l'intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des nombres décimaux. La présente étude nous a permis de mettre en avant quelques éléments pertinents dans l'enseignement-apprentissage des nombres décimaux. Toutefois, il subsiste quelques zones d'ombres qui ont le mérite d'être éclaircies...

En effet, à travers cette étude, nous avons pu constater que l'intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement pose également la question du rapport au savoir. Selon Michel Develay (1996), la psychologie se trouve être une des composantes du rapport au savoir. Celui-ci parle de « pulsion » qui anime l'élève lorsqu'il se trouve par exemple, absorber par un livre. La dimension psychologique du rapport au savoir permet de mieux appréhender ce qui dans le savoir scolaire correspond au désir de l'élève. Impliquer les élèves dans l'évolution des nombres leur permet de s'approprier ce savoir enseigné se présentant souvent comme une réalité extérieure. Les élèves se retrouvent dans une quête du savoir, et ont un rôle à jouer dans la construction de leur propre connaissance.

Afin d'approfondir les esquisses de notre étude, il serait judicieux de mettre en place d'un dispositif pédagogique sur deux années avec plusieurs enseignants et leurs classes afin de limiter le biais de l'enseignant et d'avoir un échantillon plus important. Ainsi, depuis le CM1, un groupe témoin composés de 3 classes disposerait d'un enseignement dit « traditionnel » et un autre groupe expérimental composé de 3 classes également recevrait un enseignement basé sur l'intégration de l'histoire des mathématiques pour l'apprentissage des nombres entiers jusqu'aux nombres décimaux (en s'appuyant sur plusieurs systèmes de numération : babyloniens, égyptiens, chinois). Il serait tous deux évalués régulièrement tout au long de l'année jusqu'au CM2, afin de comparer leurs acquis concernant les nombres décimaux.

Enfin, si notre étude ciblait l'enseignement-apprentissage des nombres décimaux, il serait intéressant d'étudier l'effet de ce concept sur toutes les sous-disciplines des mathématiques : les opérations (en s'appuyant par exemple sur les abaques et les bouliers) et les grandeurs et mesures (à partir des unités de mesure de l'Ancien Régime par exemple pour montrer l'importance de l'uniformisation).

Cette recherche sur l'histoire des nombres décimaux s'avère être un outil pédagogique pertinent dans notre posture d'enseignant(e) afin de mieux appuyer notre réflexion et de donner du sens à l'enseignement-apprentissage. Elle permet de centraliser différentes idées des sciences de l'éducation telles que l'épistémologie et le rapport au savoir. En effet, il est important que les concepts mathématiques présentés aux élèves tout au long de leur scolarité fassent sens. Ainsi, s'intéresser à la finalité des connaissances en mathématiques semble être un élément utile à la construction du sens.

Bibliographie

Aubert, M., Bredin, E., Michel-Pauset, E. (2013). *Les mathématiques en situation. Du socle au programme de 6^e*. Dijon : CRDP de l'académie de Dijon.

Barbin, E. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques. Comment ? Pourquoi ? *Bulletin AMQ, n°1/vol XXXVII*, 20-25.

Barbin, E. (2006). Apports de l'histoire des mathématiques et de l'histoire des sciences dans l'enseignement. *Tréma, 26*, 20-28.

Berté, A. et al. (2013). L'erreur dans l'apprentissage des mathématiques. *Petit x, n° 93*, 17-18

Boulon, J. (1992). L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire. *Grand N, n°52*, 49-79.

Charbonneau, L. (2002). Histoire des mathématiques et enseignement des mathématiques au primaire. *Instantanés Mathématiques, n° 1/vol. XXXIX*, 21-36.

Comiti, C., Neyret, R. (1979). A propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de cours moyen. *Grand N, n°18*, 5-20.

Dubois, C., Fénichel, G., Pauvert, M. (1995). Fractions et décimaux. Aperçu historique et généralités. In C., Dubois, G., Fénichel, M. Pauvert (Eds), *Se former pour enseigner les mathématiques. 3. Numération, décimaux* (63-77). Paris : Bordas.

Roditi, E. (2005). Les possibilités et les contraintes. In E., Roditi (Ed.), *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique* (47-61). Paris : L'Harmattan.

Roditi, Eric (2007). La comparaison des nombres décimaux. Comprendre les difficultés, aider à les surmonter. *APMEP, n°477*, 479-483

MEN (2002). Evaluations CE2-sixième: Repères nationaux septembre 2001, *Les dossiers, n°128*, 228-241.

Perrin-Glorian, M.-J. (1985) .Représentation des fractions et des nombres décimaux chez les élèves de CM2 et du collège. *Petit x n°10*, 5-29.

Sitographie

BO spécial du 26 novembre 2015 : programmes d'enseignement de l'école élémentaire et du collège : <http://www.education.gouv.fr/cid95812/au-bo-special-du-26-novembre-2015-programmes-d-enseignement-de-l-ecole-elementaire-et-du-college.html>

[consulté le 17/02/2017]

L'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) : <http://www.apmep.fr/Les-decimaux-de-l-Ecole-au-College> [consulté le 28/04/2017]

Mission Maths de l'Académie de Rouen : <http://missionmaths76.spip.ac-rouen.fr/> [consulté le 20/02/2017]

Ressources d'accompagnement Eduscol : <http://eduscol.education.fr/cid101461/ressources-maths-cycle-3.html> [consulté le 17/02/2017]

Annexe I

Il était une fois...

LES NOMBRES !

Au début, il n'y avait rien ! Même pas 2, même pas 1 et surtout pas 0 !

Et puis ... les moutons sont arrivés

Oui oui les moutons. Le berger, le matin faisait sortir son troupeau de la bergerie. Le soir, il le faisait rentrer.

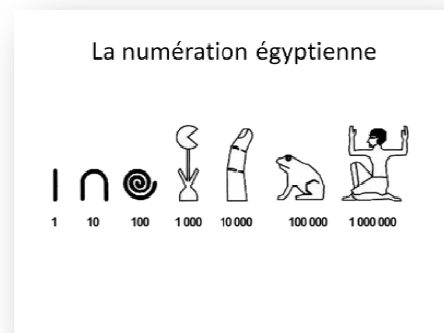
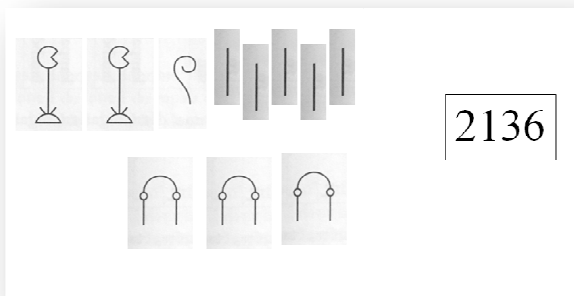
Pour être sûr de ne pas perdre de moutons, il avait un sac et un tas de cailloux.

Le matin, chaque fois qu'un mouton sortait de la bergerie, il mettait un caillou dans un sac.

Le soir, chaque fois qu'un mouton rentrait dans la bergerie, il enlevait un caillou du sac

Ainsi, s'il lui restait des cailloux dans le sac, cela voulait dire que.... ? (il lui manquait des moutons). Il savait même combien il lui en manquait.

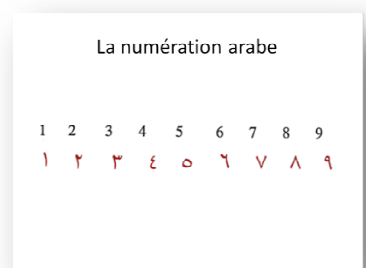
Mais comme on ne trouvait pas de cailloux partout. Les Hommes ont inventé des symboles pour écrire les nombres. Chacun a eu ses symboles et sa façon de les placer. Par exemple, les égyptiens utilisaient différents hiéroglyphes que nous avons découverts dans des grottes.



Et puis tout le monde a trouvé la numération arabe plus astucieuse !

Alors tout le monde l'a utilisée.

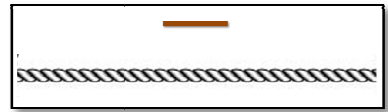
Et on a vécu comme ça pendant quelques centaines d'années. On pouvait compter le nombre de moutons, de gâteaux, les maisons etc.



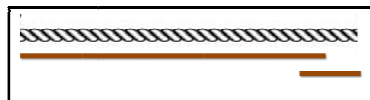
Annexe II

Un jour, un homme a voulu mesurer une ficelle avec un bâton.

D'après vous comment il a fait ?



Il a reporté plusieurs fois le bâton sur sa ficelle. Mais arrivé au bout de la ficelle : problème ! La ficelle mesurait plus que 5 bâtons, mais moins que 6 bâtons ?? Ça n'allait pas. Ce n'était pas précis.

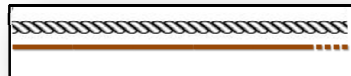


Alors, il a décidé de partager son bâton en 10 parties égales

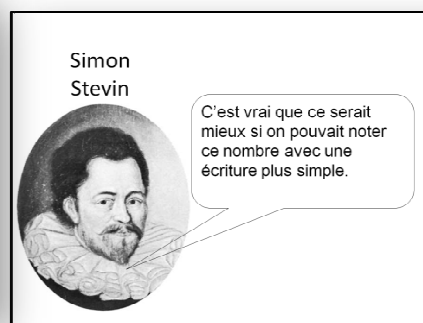
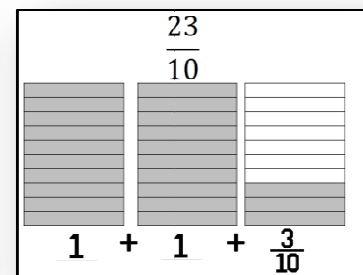
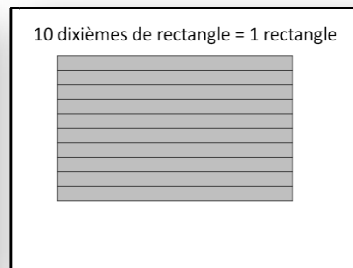
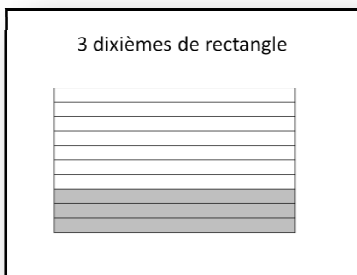


Un petit bout faisait un dixième de bâton, le bâton tout entier faisait donc ? Dix dixièmes !

Il a fini par trouver ceci : « Ma ficelle mesure 5 bâtons et 4 dixièmes de bâton »



Il était content. Rentré chez lui, il a fait la même chose avec des carrés, des rectangles etc.



L'exemple de 23 dixièmes

- Tout nombre entier proposé se dit **commencement**, son signe est tel (0)
- Exemple: 2_0
- Chaque dixième de l'unité, nous le nommons **prime**, son signe est (1)
- Exemple: $2_0 3_1$

Annexe III

Simon Stevin a écrit un livre intitulé *La Disme*, dans lequel il a essayé de donner une écriture plus pratique des nombres décimaux.

En effet, ces nombres étaient connus, car nés vers 2500 av J.-C. des fractions égyptiennes. Ils ont pourtant tardé à venir en Europe.

Stevin était comptable et administrateur de la ville de Bruges ; son livre, *La Disme*, s'adressait aux « mesureurs », « maîtres de monnaie », « astrologues », et « à tous les marchands ».

Voici des phrases issues de son ouvrage du XVI^{ème} siècle

Extrait n°1 « Les 27_08_1 donnés font $27 + \frac{8}{10}$ »

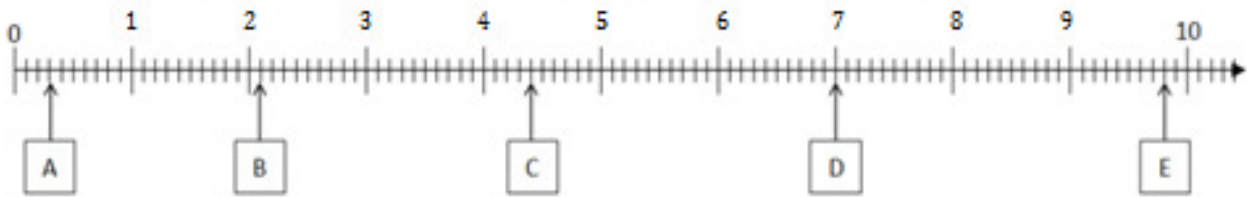
Extrait n°2 « Tout nombre entier proposé se dit **commencement**, son signe est tel (0) » ; « Par exemple [...] trois cents soixante quatre, nous le nommons trois cents soixante quatre commencements, les décrivant en cette sorte 364_0 »

« Chaque dixième de l'unité de commencement nous le nommons **prime**, son signe est (1). »

Extrait n° 3 « Nous n'écrivons pas 7_012_1 mais en leur lieu 8_02_1 car ils valent autant. »

Annexe IV

1. Donne le nombre décimal correspondant à chaque point placé sur la droite graduée.



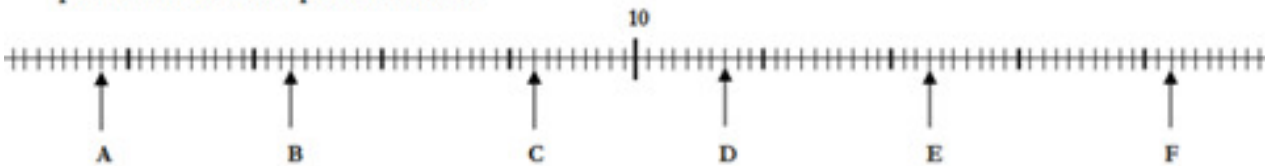
A	B	C	D	E

2. Place les points suivants sur la droite.

F	G	H	I	J
9,2	7,9	4,5	2,4	0,6



1. Voici une droite numérique graduée en unités, en dixièmes et en centièmes. Quels sont les points indiqués par les flèches ? Complète le tableau.



A	B	C	D	E	F

2. Utilise le tableau et place les points A, B, C, D et E sur la droite graduée ci-dessous.

A	B	C	D	E	F
9,75	9,9	10,15	10,27	10,37	9,55



Annexe V

Ecris ces fractions sous forme d'un nombre à virgule.

a) $\frac{23}{10} =$

f) $\frac{5}{10} =$

b) $\frac{1}{100} =$

g) $\frac{80}{10} =$

c) $\frac{24}{10} =$

h) $\frac{124}{100} =$

d) $\frac{595}{100} =$

i) $\frac{805}{10} =$

e) $\frac{491}{10} =$

j) $\frac{76}{100} =$

Ecris ces nombres décimaux sous forme d'une fraction décimale.

a) 3,8 =

f) 11,9 =

b) 67,1 =

g) 0,63 =

c) 27,48 =

h) 1,38 =

d) 4,90 =

i) 12,26 =

e) 0,04 =

j) 10,4 =

Annexe VI

Dans les nombres décimaux suivants, indique ce que représente le chiffre 5 :

237,54 : 8,05 :

34,15 : 356,17 :

3 405, 1 :

Dans les nombres décimaux suivants, indique ce que représente le chiffre 8 :

837,9 : 31,83 :

4226,08 : 798, 56 :

125,80 :

Réponds aux questions suivantes :

a) Dans une unité, combien y-a-t-il de dixièmes ?

b) Dans une unité, combien y-a-t-il de centièmes ?

c) Dans une dizaine, combien y-a-t-il de dixièmes ?

d) Dans une dizaine, combien y-a-t-il de centièmes ?

Complète les phrases :

a) Le nombre de centaines dans 5 876,16 est

b) Le nombre de dixièmes dans 876,21 est

c) Le nombre centièmes dans 436,73 est

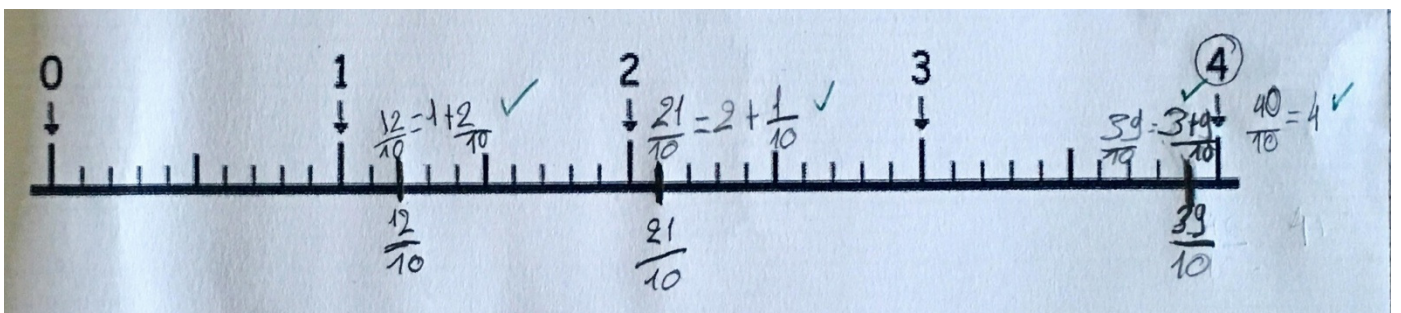
d) Le nombre de dizaines dans 6 219, 54 est

e) Le nombre de centièmes dans 25,17 est.....

f) Le nombre de dixièmes dans 760,92 est.....

Annexe VII

$\frac{32}{10}$	$3 + \frac{2}{10}$
$\frac{105}{10}$	$10 + \frac{5}{10}$
$3 + \frac{5}{10}$	$\frac{35}{10}$
$\frac{40}{10}$	4
$\frac{21}{10}$	$2 + \frac{1}{10}$
$\frac{27}{10}$	$1 + 1 + \frac{7}{10} = 2 + \frac{7}{10}$
$\frac{3}{10} + \frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$



Annexe VIII

Joueur 1 : [REDACTED]
 Joueur 2 : [REDACTED]
 Joueur 3 : [REDACTED]

	Joueur 1	Joueur 2	Joueur 3
1 ^{er} tour	Stevin : $20 \frac{6}{10}$ 20 61	Lettres : 2 unités et 6 dixièmes	Fraction : $\frac{2+6}{10}$
2 ^{ème} tour	Lettres : 3 unités et 7 dixièmes	Fraction : $\frac{3+7}{10}$	Stevin : 30 71
3 ^{ème} tour	Fraction : $\frac{4+8}{10}$	Stevin : 40 81	Lettres : 4 unités et 8 dixièmes
4 ^{ème} tour	Stevin : 80 31	Lettres : 8 unités et 3 dixièmes	Fraction : $\frac{8+3}{10}$
5 ^{ème} tour	Lettres : 43 unités et 6 dixièmes	Fraction : $\frac{1+6}{10}$	Stevin : 430 61
6 ^{ème} tour	Fraction : $\frac{7+9}{10}$	Stevin : 70 91	Lettres : 7 unités et 9 dixièmes

Joueur 1 : [REDACTED]
 Joueur 2 : [REDACTED]
 Joueur 3 : [REDACTED]

	Joueur 1	Joueur 2	Joueur 3
1 ^{er} tour	Stevin : $\frac{3+7}{10} = 30$ 71	Lettres : 3 unités et 7 dixièmes	Fraction : $\frac{3+7}{10}$
2 ^{ème} tour	Lettres : 5 unités et 4 dixièmes	Fraction : $\frac{5+4}{10}$	Stevin : 50 41
3 ^{ème} tour	Fraction : $\frac{8+5}{10}$	Stevin : 80 51	Lettres : 8 unités et 5 dixièmes
4 ^{ème} tour	Stevin : 90 61	Lettres : 9 unités et 6 dixièmes	Fraction : $\frac{9+6}{10}$
5 ^{ème} tour	Lettres : 2 unités et 3 dixièmes	Fraction : $\frac{2+3}{10}$	Stevin : 20 31
6 ^{ème} tour	Fraction : $\frac{4+8}{10}$	Stevin : 40 81	Lettres : 4 unités et 8 dixièmes

Annexe IX

$653,92:6$ est le chiffre des centaines
 $60,204:6$ est le chiffre des dizaines
 $0,562:6$ est le chiffre des dizaines
 $1,624:6$ est le chiffre des dizaines
 $268:2$ est le chiffre des ~~dizaines~~ dizaines
 $653,92:2$ est le chiffre des centaines unités
 $60,204:2$ est le chiffre des dizaines centaine

Observe les nombres suivants.

$26,8 = 6$ est le chiffre des unités.

$653,92 = 6$ est le chiffre des centaines.

$60,204 = 6$ est le chiffre des dizaines

$0,562 = 6$ est le chiffre des centièmes

$1,624 = 6$ est le chiffre des dixièmes

$26,8 = 2$ est le chiffre des dizaines

$653,92 = 2$ est le chiffre des millièmes

$60,204 = 2$ est le chiffre des dixièmes